

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MATEMÁTICA

Ana Clara Buçard Teixeira

Flocos de neve: Matemática e Física a serviço da beleza.

Rio de Janeiro
2016

Ana Clara Buçard Teixeira

Flocos de neve: Matemática e Física a serviço da beleza.

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2016

Teixeira, Ana

Flocos de neve: Matemática e Física a serviço da beleza. / Ana
Teixeira - 2016

38.p

1. Geometria Diferencial 2. Equações Diferenciais 3. Modelagem
Matemática . I.Flocos de neve: Matemática e Física a serviço da
beleza.

CDU 536.21

Ana Clara Buçard Teixeira

Flocos de neve: Matemática e Física a serviço da beleza.

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 08 de Março de 2016

BANCA EXAMINADORA

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Michel Cambrinha de Paula

Doutor em Matemática - IMPA

Luiz Amancio Machado de Sousa Junior

Doutor em Matemática - UFRJ

A todos que com amor me suportaram.

Resumo

O interesse da Ciência pelos flocos de neve não é recente, existem relatos que indicam que os chineses já se interessavam pela beleza e pela forma do floco de neve ainda em 135 A.C. O astrônomo e matemático Johannes Kepler [2] escreveu em 1611 um pequeno tratado cujo título era *The Six-Cornered Snowflake* no qual formulou a seguinte pergunta fundamental: *Deve existir alguma causa definida que faz com que quando começa a nevar, o formato dos flocos são invariavelmente o de uma estrelinha de seis pontas, se tal fato ocorre por acaso então porque não acontece com cinco pontas ou sete pontas?* Com o conhecimento científico de hoje podemos responder esta questão e o objetivo deste trabalho é mostrar um resultado importante para tal, conhecido como Teorema de Wulff. Para a completa compreensão dos conteúdos aqui abordados o leitor deverá possuir conhecimentos de Geometria Diferencial, Cálculo em \mathbb{R}^n e Equações Diferenciais.

Palavras-chaves: Flocos de neve, Teorema de Wulff

Abstract

The interest of science for this subject isn't new, reports shows that Chinese had interest in the beauty and shape of snowflakes yet before 135 B.C. The astronomer and mathematician Johhanes Kepler [1] wrote in 1611 a small paper entitled *On the Six-Cornered Snowflake* where he formulated the following fundamental question: *There must be some definite cause why, whenever snow begins to fall, its initial formation invariably displays the shape of a six-cornered starlet. For it happens by chance, why do they not fall just as well with five corners or seven?* With current scientific knowledge we are able to answer this questions and the purpose of this paper is to show an important result for so, known as Wulff's Theorem. For full understanding of the content approached here, the reader must have knowledge of Differential Geometry, calculus in \mathbb{R}^n and Differential Equations. Keywords: Snowflakes, Wulff's Theorem.

Agradecimentos

A Deus por nunca ter me desamparado até mesmo nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais por estarem sempre ao meu lado me apoiando em tudo.

A todos os meus amigos e parentes, pelo encorajamento e apoio.

Ao professor Gladson Antunes que com muita paciência me auxiliou em todo processo de escrever este trabalho assim como nos ensinamentos para a vida.

Aos professores do Departamento de Matemática pelos seus ensinamentos, conversas de corredor e encorajamento para que eu chegasse até aqui.

E ao amor que não me faltou.

*“Tu te tornas eternamente responsável
por aquilo que cativas.”*

*Antoine de Saint-Exupéry (O pequeno
príncipe).*

Sumário

1	Introdução	7
2	Cristais de gelo	10
2.1	A química por trás dos flocos	11
2.2	A origem do nome	12
3	Conhecimentos Preliminares	13
3.1	Comprimento de arco	13
3.2	Comprimento de arco como parâmetro	15
3.3	Vetores tangente unitário e normal principal	16
3.4	Curvatura	18
4	Modelos geométricos x modelos não-geométricos	20
4.1	Forma de equilíbrio do cristal - Forma de Wulff	20
5	Teorema de Wulff	22
5.1	O problema variacional associado à forma de equilíbrio do cristal	26
6	Conclusão	28
A	- Curvas Pedais	30
A.1	Relações Fundamentais	30
A.2	Exemplos	32
	Referências Bibliográficas	34

1 Introdução

O estudo dos flocos de neve vem de longa data. Trabalhos mostram que a beleza deles fascina as pessoas desde os primórdios. De acordo com [2] e [3], já em 135 A.C. os chineses demonstravam interesse por esse assunto. No entanto, foi apenas em 1611 que o astrônomo e matemático Johannes Kepler apresentou estudos mais detalhados sobre o tema, publicando um breve tratado cujo título era *The Six-Cornered Snowflake*, no qual formulou a seguinte pergunta fundamental: *Deve existir alguma causa definida que faz com que quando começa a nevar, o formato dos flocos são invariavelmente o de uma estrelinha de seis pontas, se tal fato ocorre por acaso então porque não acontece com cinco pontas ou sete pontas?*

Na época de Kepler ainda não existiam ferramentas físicas nem teóricas, como por exemplo, o conhecimento da estrutura molecular da água, que hoje sabemos ser responsável por determinar o formato hexagonal dos cristais de gelo, que pudessem auxiliá-lo na justificativa do formato dos flocos de neve, entretanto Kepler apresentou um conjunto bastante razoável de argumentos. Em 1665 o cientista Robert Hooke publicou o artigo *Micrographia*, no qual ele descreve suas observações dos flocos de neve utilizando para isso microscópios, a partir daí desvenda alguns dos segredos envolvidos na formação de tais estruturas. Mais detalhes históricos sobre estudos realizados no sentido de compreender como se formam tais estruturas podem ser encontrados em [3].

O floco de neve pode ser um cristal de neve ou um conjunto deles dependendo do contexto. Neste texto ambas as palavras serão usadas com o mesmo significado a menos que mencionado o contrário. Conforme D'Arcy Wentworth [6]:

A beleza do floco de neve depende da sua regularidade matemática e simetria; mas de alguma forma, sua associação com inúmeras variações de um único tipo, todas relacionadas mas não iguais, aumentam enormemente nosso deleite e admiração. [...] O floco de neve é bastante complexo, e sua beleza é notória, por vezes bolhas fechadas de ar, por vezes gotas de água, cuja organização e forma simétrica são muito curiosas e nem sempre simples de explicar. Por fim, estamos aptos a ver nossos cristais de neve após um leve degelo ter arredondado

suas bordas, e intensificado sua beleza ao suavizar seus contornos.

O padrão do cristal de neve é um fenômeno interfacial, que é um fenômeno que se passa na fronteira de duas fases e neste caso, que ocorre na fronteira entre a fase sólida/vapor da água. Já os cristais de gelo crescem na fronteira das fases sólida/líquida. O crescimento dos cristais representa um exemplo conceitualmente simples de um padrão de formação e auto-organização baseado nas leis da termodinâmica, mecânica estatística, cinética e teoria do transporte. No entanto, muitas das questões teóricas relacionadas a esses fenômenos são admiravelmente matemáticas!

Do ponto de vista matemático, no que diz respeito à forma assumida pela fronteira de um floco de neve, o resultado central é conhecido como Teorema de Wulff, cujo enunciado apresentamos a seguir:

Teorema 1.0.1 (Teorema de Wulff). *Se um cristal atingiu seu equilíbrio, então a distância das faces ao centro do cristal é proporcional à sua energia livre da superfície por unidade de área.*

Muito se tem escrito sobre este teorema, e em 1943 Von Laue fez uma análise crítica sobre o assunto, entretanto a primeira prova satisfatória deste resultado para o caso bidimensional só ocorreu em 1951 com Burton, Cabrera e Frank [7].

Os flocos de neve com sua simetria hexagonal planar são uma boa ilustração para algumas questões que podem ser formuladas em um contexto mais geral. São padrões que emergem, aparentemente, de um ambiente desestruturado e que são diretamente influenciados por eles. Dependendo da história de cada cristal, que viaja por ambientes com diferentes temperaturas, supersaturações e velocidades do ar, eles formarão diferentes tipos de estrutura de gelo; e como cada história é (presumidamente) única, então a princípio são também os flocos. Partindo dessa sutileza envolta em complexidade que surgiu a vontade de estudar os flocos de neve e que deu início a essa pesquisa.

Nessa monografia de conclusão do curso de graduação abordamos um modelo matemático que descreve o crescimento dos flocos de neve, a partir de um ponto de vista geométrico. A principal referência que foi utilizada para o desenvolvimento deste trabalho foi o artigo *Flowers of Ice-Beauty, Symmetry, and complexity: A Review of The Snowflake: Winter's Secret Beauty*, publicado no periódico Notices of the American Mathematical Society, veja [1]. Talvez a causa de tanto fascínio pelos flocos de neve esteja no fato

de que são estruturas simples e pequenas porém resultam de um processo de formação muito complexo. Por isso seu estudo teórico, do ponto de vista matemático, depende de ferramentas bastante avançadas.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados alguns fatos relacionados com a estrutura química dos cristais de gelo e flocos de neve, o Capítulo 3 é dedicado à apresentação de conteúdos matemáticos preliminares necessários para compreensão dos capítulos seguintes. No Capítulo 4 apresentamos os modelos geométricos e não geométricos. No capítulo 5 são apresentados o Teorema de Wulff e o problema variacional associado à forma de equilíbrio de um cristal de gelo, respectivamente. As considerações finais e a conclusão são apresentadas no Capítulo 6. Há ainda um anexo sobre curvas escrito gentilmente pelo professor Luiz Amâncio e para o qual gostaríamos de registrar aqui nosso agradecimento.

2 Cristais de gelo

Kepler foi o primeiro cientista a olhar e investigar cientificamente a simetria hexagonal dos flocos de neve ainda no começo do século XVII. Em 1611 em seu tratado [2], ele comparou a simetria dos flocos de neve com a simetria encontrada em favos de mel e na distribuição das sementes dentro das romãs.



Figura 2.1: Favo de Mel

Figura 2.2: Floco de Neve

Figura 2.3: Romã cortada

Naquela época não havia conhecimento disponível sobre a estrutura molecular da água, que hoje sabemos ser determinante no formato hexagonal dos cristais de gelo. Mesmo sendo incapaz de explicar em termos mecânicos o formato observado nos flocos de neve, Kepler apresentou argumentos bastante razoáveis e que deram origem ao que hoje é conhecido como problema de Kepler sobre o empacotamento de esferas¹. Um fato interessante de se mencionar é que Kepler concluiu que a ciência de seu tempo não era avançada o suficiente para explicar estes fatos. Um bom cientista sabe quando admitir ignorância e seguir em frente. Hoje, através da cristalografia e de microscópios potentes, sabemos o que é necessário para explicar essa forma que tanto intrigou no passado.

¹Em geometria, um empacotamento de esferas é um arranjo de esferas não sobrepostas (seus interiores não se sobrepõem) dentro de um espaço que as contém. As esferas consideradas são geralmente todas de tamanho idêntico, e o espaço é geralmente o espaço euclidiano tri-dimensional. Porém, problemas de empacotamento de esferas podem ser generalizados para considerar esferas desiguais, espaços euclidianos n -dimensionais (onde o problema se torna empacotamento de círculos em duas dimensões, ou empacotamento de hipersferas em dimensões superiores) ou para espaços não-euclidianos como o espaço hiperbólico.

2.1 A química por trás dos flocos

A molécula de água tem origem na ligação covalente (ligação química que ocorre entre ametais, semimetais e hidrogênio, onde há compartilhamento de elétrons para que os átomos se estabilizem) entre o hidrogênio e o oxigênio. O hidrogênio possui 1 elétron na camada de valência - que se estabilizará com 2 elétrons - enquanto o oxigênio tem 6 elétrons na camada de valência - e se estabilizará com 8 elétrons. Desta forma a água é formada por átomos que se unem numa proporção fixa, são necessários dois átomos de hidrogênio para estabilizar um átomo de oxigênio. Nesse processo o oxigênio compartilha 2 de seus elétrons, 1 com cada átomo de hidrogênio.

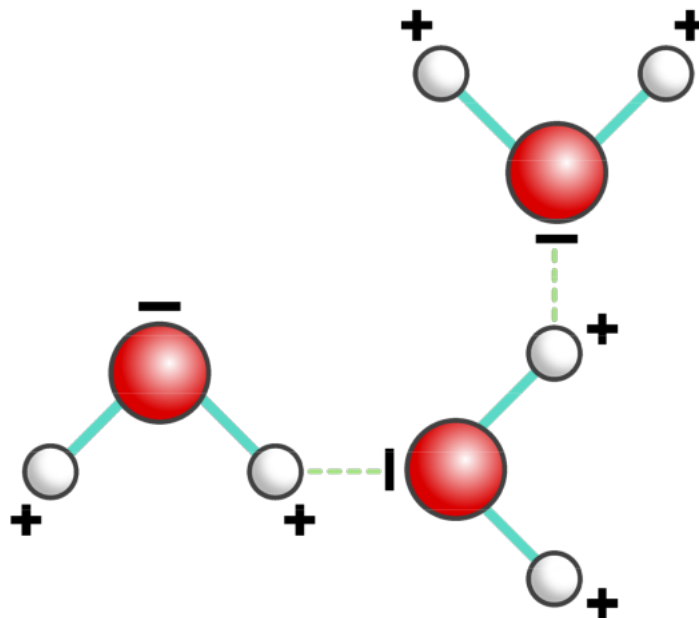


Figura 2.4: Representação das ligações atômicas da molécula de água.

A figura 2.4 mostra a estrutura do cristal na forma normal do gelo, conhecida como *ice Ih*. As bolas vermelhas representam os átomos de oxigênio e as bolas brancas representam os átomos de hidrogênio. A estrutura hexagonal do cristal de gelo é o que dá definitivamente ao flocos de neve sua simetria de seis faces. Para mais informações pode-se acessar o link: <https://www.youtube.com/watch?v=FwGH4gulLX4> onde são apresentadas mais informações sobre a formação e formato dos flocos de neve.

2.2 A origem do nome

A palavra *crystal* é derivada do Grego *krystallos*, que significa “gelo” ou “gelo limpo”. Apesar do seu significado, *krystallos* não era usado originalmente para descrever o gelo, mas sim o mineral quartzo. O antigo naturalista romano Pliny the Elder descrevia *krystallos* como uma forma de gelo, tão congelado que não poderia derreter. É claro que ele estava enganado, afinal o quartzo não contém água em sua estrutura.

A definição científica de cristais é qualquer material que os átomos ou moléculas estão organizados num padrão regular. Os cristais de gelo são formados por moléculas de água, e a sua forma usual é chamada de *ice Ih*, feita de camadas de moléculas de água organizadas em hexágonos “enrugados”, e hexágonos é claro, possuem seis faces e definitivamente carregam tal característica para os flocos de neve.

3 Conhecimentos Preliminares

Nesta seção estão presentes conceitos que se fazem necessários para a correta e adequada compreensão do Teorema de Wulff. Os conceitos e definições apresentados neste capítulo foram retirados da referência [9].

3.1 Comprimento de arco

Consideremos uma curva definida por $\sigma(t)$, $t \in [a, b]$. Podemos pensar que esta curva é uma trajetória descrita por uma partícula com velocidade $v(t) = \|\sigma'(t)\|$. Desejamos determinar qual o comprimento desta curva quando t varia de a até b . Podemos intuir que isto nada mais é do que o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo $[a, b]$, isto é,

$$\int_a^b v(t) dt.$$

Com isso podemos escrever a seguinte definição:

Definição 3.1.1. Seja C uma curva definida por uma função $\sigma(t)$, $a \leq t \leq b$, de classe C^1 . O **comprimento da curva** C é definido por

$$L(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt. \quad (3.1)$$

Esta fórmula ainda é válida se $\sigma(t)$ é C^1 por partes. Uma função $\sigma(t)$, $t \in [a, b]$ é dita C^1 **por partes** (respectivamente **contínua por partes**) se o intervalo $[a, b]$ pode ser subdividido num número finito de intervalos fechados de modo que $\sigma(t)$ restrita a cada um desses intervalos é de classe C^1 (respectivamente contínua).

Se C é uma curva em \mathbb{R}^3 , a fórmula 3.1 fica:

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt.$$

Perceba que se C é uma curva em \mathbb{R}^2 , a expressão acima se torna

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Apresenta-se agora uma justificativa, baseada no método da aproximação por poligonais, para a fórmula em (3.1). Tomemos uma curva C em \mathbb{R}^3 e seja P uma partição regular de ordem n do intervalo $[a, b]$, isto é:

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$$

onde $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ e $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$, para $0 \leq i \leq n - 1$.

Consideremos a linha poligonal obtida ligando-se os sucessivos pares de pontos $\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})$, $0 \leq i \leq n - 1$, veja figura 3.1.

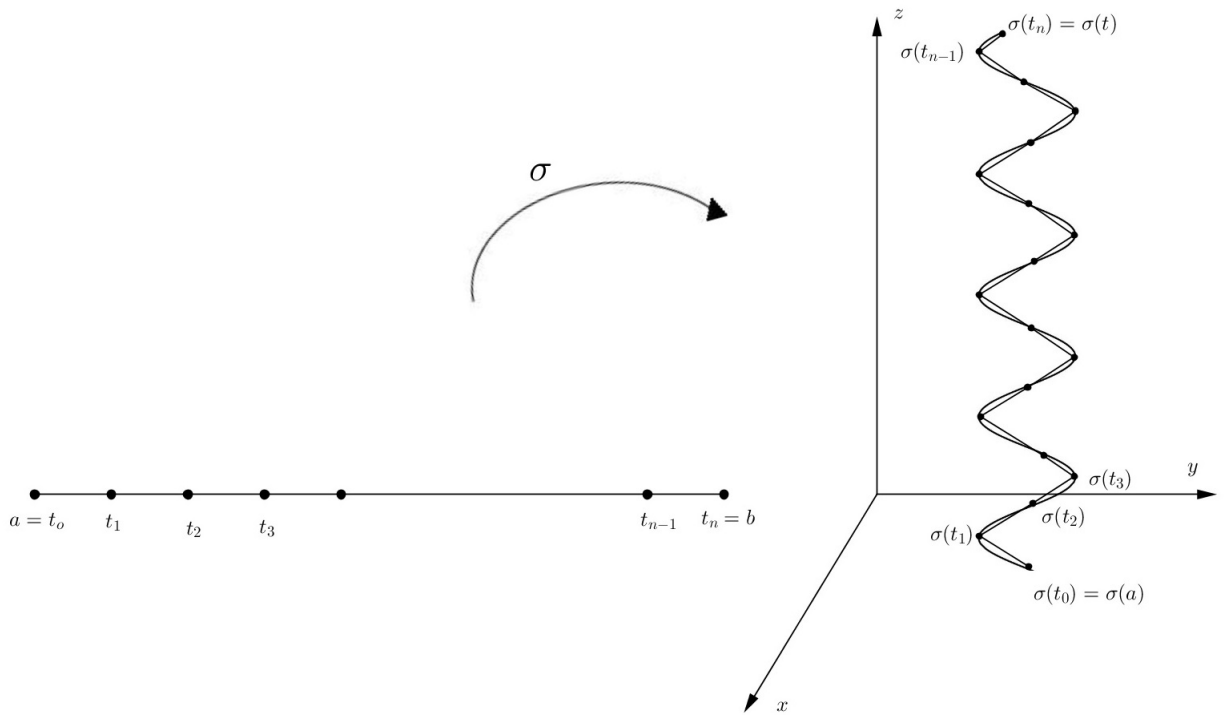


Figura 3.1: Esquema de aproximação por poligonais.

Note que quando Δt é pequeno, o comprimento da linha poligonal é aproximadamente igual ao comprimento de C .

Mas o comprimento do segmento de reta de $\sigma(t_i)$ até $\sigma(t_{i+1})$ é

$$\|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2}$$

onde $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando o Teorema de Valor Médio às funções $x(t), y(t)$ e $z(t)$ em $[t_i, t_{i+1}]$, obtemos $t_i^x, t_i^y, t_i^z \in (t_i, t_{i+1})$ tais que:

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^x)(t_{i+1} - t_i);$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^y)(t_{i+1} - t_i);$$

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^z)(t_{i+1} - t_i);$$

logo, o comprimento total da linha poligonal é

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x'(t_i^x))^2 + (y'(t_i^y))^2 + (z'(t_i^z))^2} (t_{i+1} - t_i).$$

Portanto, o comprimento da curva C é o limite de S_n quando n tende para $+\infty$, se este limite existir. Como $\sigma'(t)$ é contínua, tal limite existe e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Daí

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

3.2 Comprimento de arco como parâmetro

Consideremos $s(t)$ o comprimento de uma curva C , parametrizada por uma função de classe C^1 , $\sigma(t)$, desde o ponto P_0 correspondente a $t = t_0$ até um ponto P correspondente a t , $t \geq t_0$. De (3.1) temos

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(u)\| du.$$

A função $s(t)$ é crescente e, portanto tem uma inversa $t = t(s)$. Isto nos permite **parametrizar a curva C em função do parâmetro s** do seguinte modo:

$$\sigma(s) = \sigma(t(s)).$$

Vejamos um exemplo. Seja C a curva parametrizada por $\sigma(t) = (t^2, \frac{t^3}{3}), t \geq 0$. Vamos determinar as equações paramétricas para C tendo s como parâmetro, onde s é o comprimento da curva desde o ponto correspondente a $t = 0$.

Como $\sigma'(t) = (2t, t^2)$, então $\|\sigma'(t)\| = |t|\sqrt{t^2 + 4} = t\sqrt{t^2 + 4}, t \geq 0$. Assim,

$$s(t) = \int_0^1 u\sqrt{u^2 + 4} du = \frac{1}{2} \int_0^1 2u\sqrt{u^2 + 4} du = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (u^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \right]_0^t$$

e obtemos

$$s(t) = \frac{1}{3} (t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3}$$

Consequentemente

$$t^2 + 4 = (3s + 8)^{\frac{2}{3}}$$

Como $t \geq 0$, obtemos

$$t = \sqrt{(3s + 8)^{\frac{2}{3}} - 4}$$

Substituindo este valor de t na parametrização dada para C , obtemos

$$x(s) = (3s + 8)^{\frac{2}{3}} - 4 \quad e \quad y(s) = \frac{1}{3}((3s + 8)^{\frac{2}{3}} - 4)^{\frac{3}{2}}.$$

É importante observar que mesmo que $s = s(t)$ seja conhecida explicitamente, nem sempre é possível determinar a inversa $t = t(s)$.

3.3 Vetores tangente unitário e normal principal

Considere uma partícula móvel com vetor posição $\sigma(t)$, vetor velocidade $V(t)$ e vetor aceleração $A(t)$. Se o movimento da partícula é linear, isto é, se a sua trajetória é uma reta, então $A(t)$ é paralelo a $V(t)$. Para um movimento circular com velocidade angular constante, $A(t)$ é perpendicular a $V(t)$. Abaixo se vê uma demonstração dessa afirmação

Demonstração. Considere uma partícula móvel com vetor posição $\sigma(t)$, vetor velocidade $V(t) = \sigma'(t)$ e vetor aceleração $A(t) = \sigma''(t)$. Se o movimento da partícula é linear, isto é, sua trajetória é uma reta, então o vetor aceleração $A(t)$ será paralelo ao vetor velocidade

$$\sigma(t) = (a \cos(kt), a \sin(kt))$$

uma parametrização para a trajetória circular da partícula. Assim:

$$\sigma'(t) = (-ak \sin(kt), ak \cos(kt))$$

$$\sigma''(t) = (-ak^2 \cos(kt), -ak^2 \sin(kt))$$

E fazendo o produto escalar de $A(t) = \sigma''(t)$ com $V(t) = \sigma'(t)$ obtemos:

$$\begin{aligned} A(t) \cdot V(t) &= (-ak^2 \cos(kt), -ak^2 \sin(kt)) \cdot (-ak \sin(kt), ak \cos(kt)) = \\ &= a^2 k^3 \cos(kt) \sin(kt) - a^2 k^3 \cos(kt) \sin(kt) = 0 \end{aligned}$$

O que mostra que $A(t)$ e $V(t)$ são perpendiculares. □

Vamos mostrar que num movimento qualquer, o vetor $A(t)$ é a soma de dois vetores perpendiculares, um paralelo à $V(t)$ e outro perpendicular à $V(t)$. Para tal,

introduziremos um **vetor tangente unitário** T definido por

$$T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}, \quad (3.2)$$

onde $\|\sigma'(t)\| \neq 0$

Quando uma partícula se move ao longo de uma curva, o vetor correspondente $T(t)$, sendo de comprimento constante, muda somente de direção. A variação de direção de $T(t)$ é medida por sua derivada $T'(t)$. Como $T(t)$ tem comprimento constante, temos que $T(t)$ é perpendicular a $T'(t)$.

Se $T'(t) \neq 0$, o vetor unitário na direção de $T'(t)$ é chamado **normal principal** N à curva e definido por

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}. \quad (3.3)$$

O teorema a seguir mostra que o vetor aceleração $A(t)$ é a soma de dois vetores, um paralelo à $T(t)$ e outro perpendicular à $T'(t)$

Teorema 3.3.1. *Considere uma partícula se movendo com vetor posição $\sigma(t)$.*

Se $v(t) = \|\sigma'(t)\| \neq 0$ é a velocidade da partícula, então o vetor aceleração $A(t)$ é dado pela fórmula

$$A(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t). \quad (3.4)$$

Se $T'(t) \neq 0$, temos

$$A(t) = v'(t)T(t) + v(t)\|T'(t)\|N(t). \quad (3.5)$$

Demonstração. Da fórmula 3.2, temos

$$\sigma'(t) = v(t)T(t).$$

Derivando este produto, encontramos

$$A(t) = \sigma''(t) = v'(t)T(t) + v(t)T'(t),$$

o que prova (3.4). Para provar (3.5), usamos (3.3) para escrever

$$T'(t) = \|T'(t)\|N(t).$$

□

Este teorema mostra através de (3.5) que $A(t)$ está sempre definido pelos vetores $T(t)$ e $N(t)$. Os coeficientes de $T(t)$ e $N(t)$ em (3.5) são chamados, respectivamente,

Componentes tangencial A_T e normal A_N da aceleração.

Para uma curva plana, o comprimento do vetor $T'(t)$ é a medida da taxa de variação do ângulo de inclinação de $T(t)$. Podemos justificar da seguinte forma: Uma vez que T é um vetor unitário, podemos escrever

$$T(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$$

onde $\alpha(t)$ denota o ângulo entre $T(t)$ e o eixo positivos dos x . A derivada de $T(t)$ é

$$T'(t) = (-\alpha'(t) \sin \alpha(t), \alpha'(t) \cos \alpha(t)) = \alpha'(t)u(t), \quad (3.6)$$

onde $u(t)$ é o vetor unitário dado por

$$u(t) = (-\sin \alpha(t), \cos \alpha(t)) = \left(\cos \left(\alpha(t) + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\alpha(t) + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Portanto, $\|T'(t)\| = |\alpha'(t)|$, o que mostra que $\|T'(t)\|$ é a taxa de variação do ângulo de inclinação de $T(t)$.

Além disso, como $u(t)$ é perpendicular a $T(t)$ temos:

- Se $\alpha'(t) \geq 0$ (o ângulo está crescendo) segue de (3.6) que $u(t)$ tem o mesmo sentido de $T'(t)$ e portanto, $N(t) = u(t)$
- Se $\alpha'(t) \leq 0$ (o ângulo está decrescendo), $u(t)$ tem sentido oposto a $T'(t)$ e, portanto $N(t) = -u(t)$. Isto mostra que $N(t)$ aponta sempre para o lado côncavo ¹ da curva.

3.4 Curvatura

A **curvatura** de uma curva é a **medida da taxa de variação de sua direção**, tomando esta variação em relação ao comprimento de arco, e não em relação ao parâmetro. Se s representa o comprimento de arco medido a partir de um certo ponto fixo, então a curvatura k é dada por

$$k = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| \quad (3.7)$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{T'(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{T'(t)}{v(t)}$$

¹Curva côncava: Aquela na qual qualquer segmento de reta unindo dois de seus pontos está mais próximo do observador que o trecho da curva entre esses pontos.

Se $v(t) \neq 0$, (3.7) pode ser reduzida a

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{v(t)} \quad (3.8)$$

Quando a curva é plana e tem equação cartesiana $y = f(x)$, temos que

$$\sigma(x) = (x, f(x)) \Rightarrow \sigma'(x) = (1, f'(x)), \quad (3.9)$$

logo

$$v(x) = \|\sigma'(x)\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \quad (3.10)$$

Por (3.2) temos:

$$T(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}, \frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \quad (3.11)$$

e portanto

$$T'(x) = \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right), \frac{d}{dx} \left(\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \right) \right) \quad (3.12)$$

onde usando regra do quociente e regra do produto para derivadas, obtemos, após alguns cálculos e manipulações algébricas que

$$k(x) = \frac{\|T'(x)\|}{v(x)} = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4 Modelos geométricos x modelos não-geométricos

De acordo com Langer [10], cristais facetados regulares são formados a partir de uma grande variedade de condições que fazem com que suas moléculas fiquem fortemente ligadas sobre planos denominados *planos cristalográficos*. Os cristais de gelo crescem segundo as seguintes características:

- Suas faces crescem lentamente e paralelas ao plano basal;
- as faces crescem rapidamente nas direções hexagonais.

Existem dois tipos de mecanismos que contribuem para o processo de solidificação, são os chamados controle de difusão e controle interfacial. O primeiro está relacionado com processo de longo prazo enquanto o segundo envolve processos locais. De acordo com [11], modelos matemáticos baseados nesses mecanismos são denominados modelos de crescimento não geométrico e geométrico respectivamente. Um modelo é considerado geométrico se a velocidade de crescimento normal, em um ponto interfacial, depende somente da forma da interface.

Matematicamente falando, estamos diante de problemas de fronteira móvel entre dois meios distintos, tais problemas são conhecidos como *Problemas de Stefan*, no qual um sistema não linear evolui dinamicamente no tempo. Para maiores detalhes, voltados para a formação de cristais de gelo ver [12].

Neste trabalho nossa atenção estará voltada para o estudo de modelos matemáticos geométricos relacionados com a formação e crescimento de cristais de gelo.

4.1 Forma de equilíbrio do cristal - Forma de Wulff

Nos modelos geométricos relacionados com a formação e crescimento de cristais de gelo considera-se um importante conjunto convexo¹, conhecido como forma de equilíbrio do cristal ou forma de Wulff. Sabe-se que tal forma de equilíbrio é aquela que minimiza

¹Um conjunto X em um espaço vetorial (real ou complexo) é dito convexo quando todo segmento de reta ligando dois pontos de X está contido em X

a energia livre existente na superfície do cristal.

Pondo de uma forma mais clara, quando um fluido está em contato com outro fluido, ou com um gás, uma porção de energia livre do sistema é proporcional à área da superfície de contato e a um coeficiente, a tensão superficial, que é específica para cada par de substâncias. O equilíbrio irá acontecer quando a energia livre da superfície em contato é mínima. Quando uma das substâncias envolvidas é anisotrópica², tal como um cristal, a contribuição para a energia livre total de cada elemento de área depende da sua orientação.

O princípio da energia livre mínima aparece no trabalho fundamental de J. W. Gibbs, *On the equilibrium of heterogeneous substances* (1875 - 1878), onde ele mostra o papel da tensão superficial anisotrópica para a determinação da forma de um cristal em equilíbrio. Gibbs também chama a atenção para a complexidade do crescimento de um cristal real e sugere em seu trabalho que apenas cristais muito pequenos podem ter uma forma de equilíbrio ideal.

George Wulff fez experimentos clássicos sobre o crescimento de cristais e reuniu os resultados da sua pesquisa no artigo *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Kristallflächen* (1901), primeiro publicado em russo em 1895. Em suas conclusões está incluído o célebre teorema de Wulff que será visto mais adiante.

²anisotrópico significa que certas propriedades físicas, tais como resistência mecânica e refração de luz, por exemplo, dependem da direção em que são medidas.

5 Teorema de Wulff

Neste capítulo será apresentado uma demonstração para o caso bidimensional do Teorema de Wulff, cujo enunciado é o seguinte.

Teorema 5.0.1. *Em um cristal em equilíbrio, as distâncias das faces ao centro do cristal são proporcionais à energia livre por unidade de área,*

Demonstração. A ideia central para a demonstração desse resultado consiste em relacionar a forma de equilíbrio do cristal com a expressão, em coordenadas polares, da energia livre na sua superfície.

Tal relação é obtida via um processo conhecido como construção de Wulff. De fato, considera-se um ponto T na superfície S do cristal, cuja coordenada cartesiana é $T(x, y)$ e a coordenada polar é denotada por $T(r, \theta)$, ver figura 5.1.

Sabe-se que tais coordenadas estão relacionadas segundo as equações:

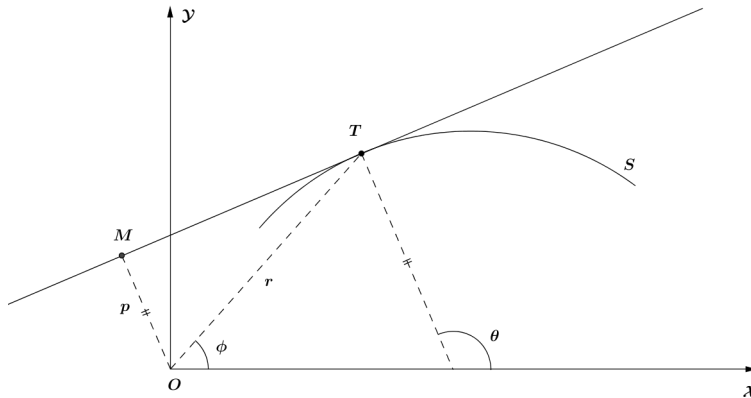


Figura 5.1: Uma porção da fronteira S do Cristal

$$x = r \cos (\phi) \quad \text{e} \quad y = r \sin (\phi) \quad (5.1)$$

No que se segue considera-se a curva s parametrizada pelo comprimento do arco, cujo parâmetro será denotado por θ .

Na construção apresentada na figura 5.1 o segmento de linha \overline{OM} é perpendicular à tangente à curva S em T e têm comprimento p . O ângulo θ é aquele formado

pelo eixo cartesiano e pelo segmento de reta paralelo ao segmento \overline{OM} que passa por T e intersecta o eixo OX .

Se $f(\theta)$ denota a energia livre por unidade de comprimento de um dos elementos da fronteira, então a energia livre total será dada por

$$F = \int_S f(\theta) ds.$$

Como $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta$, então a expressão para F se torna:

$$F = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta) \sqrt{x'^2 + y'^2} d\theta,$$

em que $x' = \frac{dx}{d\theta}$ e $y' = \frac{dy}{d\theta}$. Segundo [10], uma expressão adequada para a área n (relacionada com o número de moléculas) é dada por:

$$n = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (xy' - yx') d\theta$$

Seja agora T' o ponto de interseção do segmento de reta paralelo à \overline{OM} com eixo OX . Como \overline{OM} e $\overline{T'T'}$ são paralelos então $M\hat{O}T' = \theta$ e portanto $M\hat{O}T = \theta - \phi$. Ver figura 5.2 abaixo.

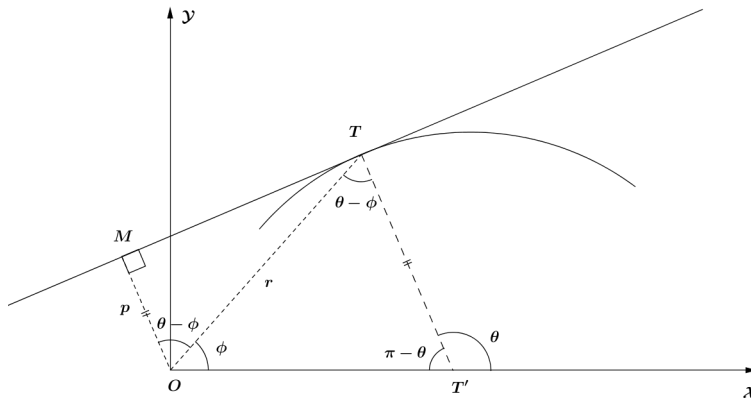


Figura 5.2: Análise dos ângulos em função de θ e ϕ .

Do triângulo $\triangle OMT$ vem que

$$\cos(\theta - \phi) = \frac{p}{r}.$$

Por outro lado sabe-se que

$$\cos(\theta - \phi) = \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi$$

portanto

$$\frac{p}{r} = \cos \theta \cos \phi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi,$$

isto é,

$$p = r \cos \theta \cos \phi + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \quad (5.2)$$

Utilizando as equações em (5.1) pode-se reescrever (5.2) como:

$$p = x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta \quad (5.3)$$

O lugar geométrico de M descrito conforme T se move ao longo da fronteira S é uma curva denominada curva pedal¹ de S . A partir da expressão em (5.3) e de sua derivada com respeito a θ obtemos:

$$\begin{aligned} x &= p \cos \theta - p' \operatorname{sen} \theta \\ y &= p \operatorname{sen} \theta + p' \cos \theta \end{aligned}$$

Consequentemente

$$\begin{aligned} x' &= (p' \cos \theta - p \operatorname{sen} \theta) - (p'' \operatorname{sen} \theta + p' \cos \theta) \\ y' &= (p' \operatorname{sen} \theta + p \cos \theta) + (p'' \cos \theta - p' \operatorname{sen} \theta) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= (p' \cos \theta - p \operatorname{sen} \theta)^2 - 2(p' \cos \theta - p \operatorname{sen} \theta)(p'' \operatorname{sen} \theta + p' \cos \theta) + \\ &\quad + (p'' \operatorname{sen} \theta + p' \cos \theta)^2 + (p' \operatorname{sen} \theta + p \cos \theta)^2 + \\ &\quad + 2(p' \operatorname{sen} \theta + p \cos \theta)(p'' \cos \theta - p' \operatorname{sen} \theta) + (p'' \cos \theta - p' \operatorname{sen} \theta)^2 = \\ &= p'^2 + 2p p'' + p^2 = (p + p'')^2 \quad (5.4) \end{aligned}$$

Observa-se também que:

$$\begin{aligned} xy' - yx' &= \\ &= (p \cos \theta - p' \operatorname{sen} \theta)[(p' \operatorname{sen} \theta + p \cos \theta) + (p'' \cos \theta - p' \operatorname{sen} \theta)] - \\ &\quad - (p \operatorname{sen} \theta + p' \cos \theta)[(p' \cos \theta - p \operatorname{sen} \theta) - (p'' \operatorname{sen} \theta + p' \cos \theta)] = \\ &= p p' \cos \theta \operatorname{sen} \theta + p^2 \cos^2 \theta + p p'' \cos^2 \theta - p p' \cos \theta \operatorname{sen} \theta - \\ &\quad - p'^2 \operatorname{sen}^2 \theta - p' p \operatorname{sen} \theta \cos \theta - p' p'' \operatorname{sen} \theta \cos \theta + p'^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \\ &\quad - p p' \operatorname{sen} \theta \cos \theta + p^2 \operatorname{sen} \theta + p p'' \operatorname{sen}^2 \theta + p p' \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \\ &\quad - p'^2 \cos^2 \theta + p' p \cos \theta \operatorname{sen} \theta + p' p'' \cos \theta \operatorname{sen} \theta + p'^2 \cos^2 \theta = \\ &= p^2 + p p'' - p'^2 + p'^2 = p(p + p'') \quad (5.5) \end{aligned}$$

¹Em anexo está um texto sobre curva pedal elaborado pelo professor Dr. Luiz Amancio Machado de Sousa Junior.

As igualdades em (5.4) e (5.5) nos permitem reescrever as expressões de F e n como

$$F = \int_{\theta_0}^{\theta_1} (p + p'')f(\theta) d\theta \quad \text{e} \quad n = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} (p + p'')p d\theta$$

Conforme foi observado na seção 4.2 do capítulo 4, necessitamos minimizar a energia livre total sob a restrição de que n seja constante.

Considera-se então o multiplicador de Lagrange λ e definimos o funcional Q como:

$$Q(\theta, p, p', p'') = \frac{1}{2}(p + p'')p - \lambda(p + p'')f. \quad (5.6)$$

Nesse ponto observa-se que, conforme [13], dado um funcional Q com dependência nas derivadas de ordem superior de p , isto é,

$$Q(\theta, p, p', p'', \dots, p^{(n)})$$

onde $p, p', \dots, p^{(n)}$ são funções que dependem da variável θ , os extremos de Q serão dados pela equação de Euler-Lagrange associada a Q que é dada por:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{d^i}{d\theta^i} \left(\frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{d^i p}{d\theta^i} \right)} \right) = 0. \quad (5.7)$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange associada à (5.6) é dada por:

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \frac{d^i}{d\theta^i} \left(\frac{\partial Q}{\partial \left(\frac{d^i p}{d\theta^i} \right)} \right) = \frac{\partial Q}{\partial p} - \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\partial Q}{\partial p'} \right) + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\partial Q}{\partial p''} \right) = 0. \quad (5.8)$$

De (5.6) vem que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial p} &= p + \frac{p''}{2} - \lambda f, \\ \frac{\partial Q}{\partial p'} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial p''} &= \frac{p}{2} - \lambda f. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (5.8) obtém-se:

$$p + \frac{p''}{2} - \lambda f + \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{p}{2} - \lambda f \right) = 0,$$

isto é,

$$p + \frac{p''}{2} - \lambda f + \frac{p''}{2} - \lambda f'' = 0,$$

ou seja,

$$p'' + p - \lambda(f + f'') = 0. \quad (5.9)$$

Nota-se que

$$p(\theta) = c \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) + \lambda f(\theta), \quad (5.10)$$

com c e θ_0 constantes, satisfaz a equação diferencial ordinária (5.9). De fato,

$$p'(\theta) = c \operatorname{cos}(\theta - \theta_0) + \lambda f'(\theta)$$

$$p''(\theta) = -c \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) + \lambda f''(\theta)$$

logo,

$$p + p'' = c \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) + \lambda f - c \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) + \lambda f'' = \lambda(f + f'')$$

Se escolhermos a origem de tal maneira que o cristal apresente uma simetria de rotação sobre ela, então pode-se considerar $c = 0$ em (5.10).

Portanto, conclui-se que

$$p(\theta) = \lambda f(\theta)$$

que nos diz que a forma polar da energia livre no bordo é proporcional ao pedal p da forma de equilíbrio do cristal. \square

5.1 O problema variacional associado à forma de equilíbrio do cristal

Considera-se o problema de determinar, no estado de equilíbrio, a forma assumida pela fronteira de um floco de neve ou cristal de gelo. Denotemos por \mathcal{C} a fase que observamos o cristal de gelo e por \mathcal{M} o meio em que ele está inserido.

Seja N um vetor unitário do \mathbb{R}^n e considere a situação em que as fases \mathcal{C} e \mathcal{M} coexistem sobre um plano perpendicular à N . Seja $f(N)$ a energia livre por unidade de área de tal interface.

Se denotarmos por B o conjunto do \mathbb{R}^n ocupado pela fase \mathcal{C} , e ∂B a fronteira de B , então a energia livre total sobre a superfície do cristal é dada por:

$$f(\partial B) = \int f(N(\xi)) ds_\xi \quad ; \quad \xi \in \partial B$$

Na expressão acima $N(\xi)$ é a normal unitária exterior à ∂B em ξ e ds_ξ é o elemento de área nesse ponto. Temos portanto que minimizar essa expressão sob a restrição

de que o volume total $|B|$ ocupado pela fase \mathcal{C} está fixado.

Dado um conjunto W , diremos que o cristal B têm a forma de W se depois de uma translação e uma dilatação ele for igual a W . A solução desse problema variacional, conhecido como construção de Wulff, é dada por:

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n ; x \cdot N \leq f(N) \text{ para cada } N \in S^{n-1}\},$$

onde S^{n-1} é a esfera unitária de \mathbb{R}^n . A figura (5.3) mostra a forma de equilíbrio do cristal, para uma simetria cúbica, formada a partir da construção de Wulff.

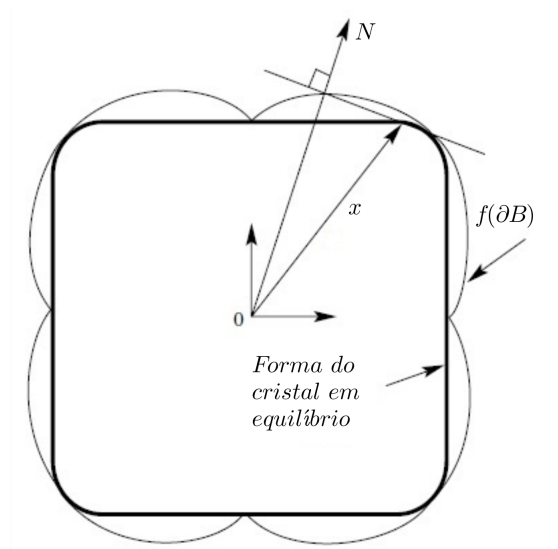


Figura 5.3: Forma de equilíbrio ideal do cristal

6 Conclusão

Quando iniciamos nossa pesquisa baseada na referência [1], havia a expectativa de apresentar um panorama geral acerca dos modelos matemáticos aplicados à formação dos flocos de neve. Com o passar do tempo, e o conseqüente aprofundamento no assunto, foi possível perceber as grandes dificuldades que enfrentaríamos. De fato, as ferramentas matemáticas necessárias para a total compreensão e apresentação do assunto estavam muito além daquelas fornecidas por um curso de graduação.

Tivemos então que fazer adaptações e concessões sobre o que seria abordado no trabalho. Foi dessa forma que nosso foco se voltou para o Teorema de Wulff, resultado que é central nos modelos geométricos que descrevem o crescimento dos flocos de neve. Apesar de num primeiro momento parecer pouco, apenas um teorema, ao começar a desenvolvê-lo pudemos verificar que para tal demonstração seriam necessárias muitas páginas de contas além de enunciados bastante complexos.

Existem muitos outros aspectos matemáticos envolvidos na formação dos cristais de gelo e dos flocos de neve que não puderam ser tratados nesse trabalho. Em [1] é apresentado um modelo denominado “toy model” que usa diretamente o conceito e cálculo de curvatura e que é um modelo mais próximo da realidade física, mas sem muito rigor nas provas e demonstrações. Ainda na referência [1] são discutidas algumas questões relacionadas com critérios de estabilidade bem como são apresentados alguns modelos mais sofisticados.

Para dar uma ideia do tamanho do campo de pesquisa nessa área há uma Revista Científica dedicada exclusivamente ao tema, o *Journal of Crystal Growth*, que existe desde 1967 e já conta com mais de 400 volumes e com publicações de diversos países como: Reino Unido, Coréia do Sul, Suíça, Índia, China, entre outros.

O processo de pesquisa, bem como os desafios que se apresentaram, tais como demonstrações incompletas ou inexistentes, falta de informações, entre outros, me fizeram conectar muitos dos assuntos vistos em diferentes disciplinas ao longo da minha graduação e serviram também para me mostrar de forma prática como os conhecimentos adquiridos ao longo do curso poderiam ser aplicados em uma situação real do cotidiano. Serviram também para fortalecer o meu objetivo de ingressar em um Programa de Pós-Graduação

em Matemática, mostrando que o conhecimento adquirido na licenciatura não precisa ficar restrito apenas a uma sala de aula, mas que a matemática está em todo lugar.

De fato, o modelo apresentado neste trabalho não tem o rigor de um cientista que estuda a formação e crescimento dos flocos, mas como em todos os tópicos que envolvem duas disciplinas magistrais tais como a matemática e a física, algumas transigências precisam ser feitas. Com isso fica claro que os modelos físico-matemáticos são muito mais complexos do que pode parecer por este trabalho.

A - Curvas Pedais

Definição A.0.1. Sejam C uma curva diferenciável contida em um plano α e O um ponto fixo de α . O lugar geométrico das projeções ortogonais de O sobre as retas tangentes a C é chamado *curva pedal de C em relação a O* . Não havendo possibilidade de confusão, falaremos apenas curva pedal de C .

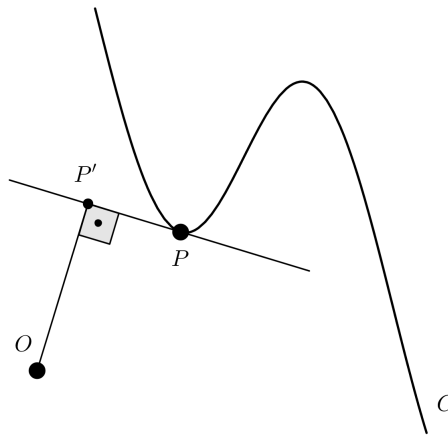


Figura A.1: P' é ponto da curva pedal de C .

A.1 Relações Fundamentais

Sem perda de generalidade, daqui em diante assumiremos que O é a origem de um sistema de coordenadas cartesiano ou polar.

Seja C uma curva diferenciável. A reta t tangente à C em P forma um ângulo orientado ϕ com o eixo das abscissas.

Na figura (A.2) θ é o *ângulo polar* e ψ é o ângulo com mesma orientação que ϕ e θ entre a tangente t e a s que contém o raio vetor $r = \overrightarrow{OP}$. Sejam P' a projeção ortogonal de P sobre t e $p = \overrightarrow{OP}'$. Da figura deduzimos que:

$$p = r \operatorname{sen} \psi \tag{A.1}$$

$$\phi = \theta + \psi \Rightarrow \operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}(\phi - \theta) = \frac{\operatorname{tg} \phi - \operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \theta} \tag{A.2}$$

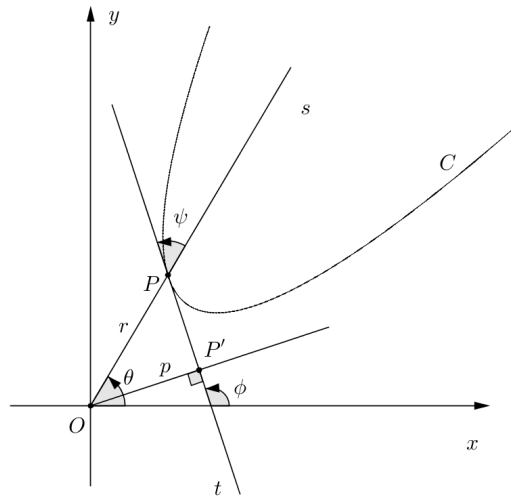


Figura A.2: Ângulos da construção

Consideremos a equação da curva C em *coordenadas polares*: $r = f(\theta)$, onde $f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

A curva C pode ser parametrizada como:
$$\begin{cases} C : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ C(\theta) = (f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \operatorname{sen}(\theta)). \end{cases}$$

A tangente de ϕ é dada por:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta) \operatorname{sen} \theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta) \cos \theta)} = \frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta}, \text{ onde } f'(\theta) = \frac{d}{d\theta}(f(\theta)). \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.3) em (A.2) obtemos

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}}{1 + \left(\frac{f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta} \right) \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}} \implies \operatorname{tg} \psi = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} \implies$$

$$\operatorname{cotg} \psi = \frac{f'(\theta)}{f(\theta)} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \quad (\text{A.4})$$

As *coordenadas pedais* são r e p e a equação da curva em coordenadas pedais é da forma: $p = f(r)$.

Utilizando as relações (A.1) e (A.4) podemos obter a equação pedal da curva pedal de C . Vejamos alguns exemplos.

A.2 Exemplos

Exemplo 1. $x^2 + y^2 = 2ax$ (Círculo de centro em $Q = (a, 0)$ e raio a)

Temos:

$$\begin{aligned} r^2 &= 2 a r \cos \theta \Rightarrow r = 2a \cos \theta \\ \frac{dr}{d\theta} &= -2a \operatorname{sen} \theta \Rightarrow \cotg \psi = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \frac{-2a \operatorname{sen} \theta}{2a \cos \theta} = \\ &= -\operatorname{tg} \theta = \cotg \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} + \theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } p &= r \operatorname{sen} \psi = r \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \\ &= r \cos \theta = r \cdot \frac{r}{2a} = \frac{r^2}{2a} \end{aligned}$$

(Cardióide)

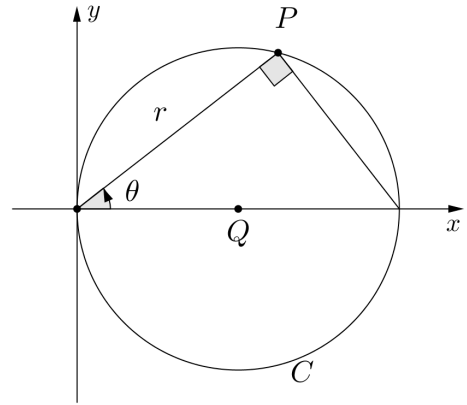


Figura A.3: Círculo de raio a

Exemplo 2. $x^2 - y^2 = a^2$ (Hipérbole).

Temos:

$$r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2 \Rightarrow r^2 \cos(2\theta) = a^2$$

Derivando implicitamente obtemos

$$\begin{aligned} 2r \frac{dr}{d\theta} \cos 2\theta - r^2 2 \operatorname{sen} 2\theta &= 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{tg} 2\theta \Rightarrow \\ \cotg \psi &= \operatorname{tg} 2\theta = \cotg \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2} - 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } p &= r \operatorname{sen} \psi = r \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - 2\theta \right) = \\ &= r \cos 2\theta = r \frac{a^2}{r^2} = \frac{a^2}{r} \text{ (Lemniscata)} \end{aligned}$$

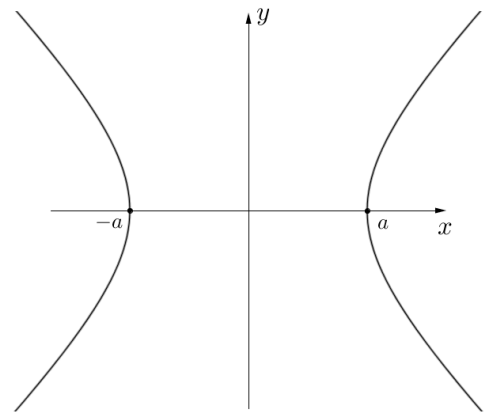


Figura A.4: Hipérbole

Exemplo 3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (Astróide).

Temos:

Equação paramétrica: $c(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), t \in (0, 2\pi)$

$$tg \phi = \frac{3 a \cos t \sin^2 t}{-3 a \sin t \cos^2 t} = -tg t$$

Equação da reta tangente:

$$y - a \sin^3 t = -tg t (x - a \cos^3 t)$$

Distância da origem à reta tangente:

$$p = a \frac{|\sin t \cos t (\cos^2 t + \sin^2 t)|}{|\cos t| \sqrt{1 + tg^2 t}} =$$

$$= a |\sin t \cos t|$$

$$i. \cos^2 t \sin^2 t = \frac{p^2}{a^2}$$

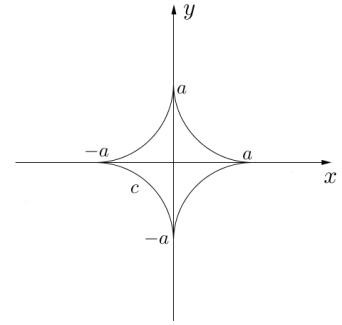


Figura A.5: Astróide

$$\text{Logo, } r^2 = x^2 + y^2 = a^2(\cos^6 t + \sin^6 t) = a^2[(\cos^2 t)^3 + (\sin^2 t)^3] =$$

$$= a^2[(\cos^2 t + \sin^2 t)^3 - 3 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t)] = a^2(1 - 3 \cos^2 t \sin^2 t)$$

$$\text{e resulta de (i) que } r^2 = a^2 \left(1 - \frac{3p^2}{a^2}\right) \Rightarrow p^2 = \frac{1}{3}(a^2 - r^2).$$

Esta curva é chamada "quadrifolium".

Referências Bibliográficas

- [1] Adam, J. A. *Flowers of Ice - Beauty, Symmetry, and Complexity: A Review of The Snowflake: Winter's Secret Beauty*, Notices of the **AMS**, Volume 52, Numer 4.
- [2] Kepler, Johannes, *On the six-cornered Snowflake*, Gottfried Tampach, Frankfurt, 1611.
- [3] Unknown, *H₂O: A biography of whater*, Phoenix, London, 1999.
- [4] Highfield, Roger, *The physics of Christmas*, Little, Brown and Co., New york, 1998.
- [5] Libebrecht, Kenneth, *The Snowflake: Winter's Secret Beauty*, Voyageur Press, 2003.
- [6] Thompson, D. W., *On Grownth and Form*, Dover, New York, 1992.
- [7] Burton, W.K., Cabrera, N and Frank, F.C. *The growrh of crystals and equilibrium structure of their surfaces*, University of Bristol, 1951.
- [8] M. Elbaum and J.S. Wettlaufer, *Relation of growth and equilibrium crystal shapes*, Phys. Rev. E 48 (1993), 3180-3.
- [9] Pinto, D. and Morgado, M. C. F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, 3. ed 8. reimpr. Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 2013
- [10] Langer, L. S., *Instabilities and pattern formation in crystal growth*, Rev. Mod. phys. 52 (1980) 1-28
- [11] Wettlaufer J. S., Jackson M., and Elabaum M., *A geometric model for anisotropic crystal growth*, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994), 5957-67.
- [12] Taylor J.E., Cahn J. W. and Handwerker C. A., *Geometric models of crystal growth*, Acta Metall. Mater. 40 (1992), 1443 -74

- [13] Germano et al, *O FORMALISMO VARIACIONAL DE LAGRANGE E HAMILTON NO ENSINO DE MECÂNICA BÁSICA NA GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA*
Revista do Ensino de Engenharia, v. 26, n. 1, p. 9-17, 2007