Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Matemática

Erick Cargnel Borges Barreto

Alguns Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações

Rio de Janeiro
2017

Erick Cargnel Borges Barreto

Alguns Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Doutor em Matemática - COPPE/UFRJ

Rio de Janeiro

2017

Cargnel, Erick

Alguns Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações / Erick Cargnel - 2017

43.p

1.Análise Matemática 2. Topologia.. I.Título.

CDU 536.21

Erick Cargnel Borges Barreto

Alguns Teoremas de Ponto Fixo e Aplicações

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UNIRIO, como requisito para a obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 20 de Dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Doutor em Matemática - COPPE/UFRJ

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UFRJ

Leonardo Tadeu Silvares Martins

Doutor em Matemática - UFF

DEDICATÓRIA.

Ao meu pai (em memória), por sempre me incentivar o gosto pela aprendizagem e pela ciência. À minha mãe, por todo apoio. À Carolina, por todo apoio, incentivo e paciência. Aos amigos, pelo apoio e companheirismo.

Resumo

Este trabalho apresenta o Teorema do Ponto-Fixo de Banach e o Teorema do Ponto-Fixo de Brouwer, ambos em casos particulares, com o objetivo de ser acessível a um estudante de matemática ao final de sua graduação.

Como aplicações destes teoremas, são apresentados em casos particulares o Teorema da Função Implícita, o Teorema de Picard e o Teorema do Valor Intermediário.

Palavras-chaves: Análise Matemática, Ponto-Fixo, Brouwer, Banach.

Abstract

This paper presents the Banach Fixed-Point Theorem and the Brouwer Fixed-Point Theorem, both in particular cases, with the objetive of being acessible to a math student at the end of the undergraduate course.

As applications of these theorems, the Implicit Function Theorem, Picard's Theorem and the Intermediate Value Theorem are presented in particular cases.

Keywords: Mathematical analysis, Fixed-Point, Brouwer, Banach.

Agradecimentos

Agradeço ao meu pai *Érico Barreto*, em memória, e a minha mãe *Lia Borges*, por sempre colocarem a minha educação, saúde, felicidade e bem estar em primeiro lugar.

Agradeço ao corpo docente da Escola de Matemática da UNIRIO, não apenas pelo conhecimento lógico-racional, mas por toda a dedicação na formação de professores. Aos mestres e doutores desta instituição, meus eternos agradecimentos. Em especial, agradeço aos professores *Marcelo Rainha*, pela orientação neste trabalho, e *Leonardo Silvares*, pela orientação nos projetos de Iniciação Científica.

Agradeço aos amigos que encontrei neste curso, companheiros que fizeram parte de minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

À minha amada *Carolina Barcellos*, agradeço por toda paciência, compreensão e apoio ao longo destes vários anos. Não existem palavras no mundo que possam expressar minha eterna gratidão.

Por fim, agradeço à Deus e a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, e o meu muito obrigado.

"Sempre passe o que você aprendeu".

Mestre Yoda (O Retorno do Jedi)

Sumário

1 Introdução

O problema de ponto fixo perneia diversas áreas da Matemática. Como veremos no decorrer deste trabalho, tais problemas consistem em resolver uma equação da forma

$$f(x) = x \tag{1.1}$$

onde f é uma função de x. Os contextos onde problemas deste tipo residem variam desde simples equações lineares, até a condição de existência e unicidade de soluções em equações diferenciais.

Este trabalho tem como objetivo apresentar dois resultados de ponto fixo, o Teorema de Stefan Banach e o Teorema de Luitzen Egbertus Jan Brouwer, à um estudante de Matemática em final de graduação.

Sendo assim, ambos os teoremas são apresentados e demonstrados em casos mais particulares. Além disto são apresentadas algumas aplicações, a fim de ilustrar o potencial de tais teoremas.

No Capítulo 2 são apresentados os pré-requisitos, sobre Séries e Sequências de Funções e a Topologia do Espaço Euclidiano.

No Capítulo 3, o Teorema do Ponto Fixo de Banach é apresentado e demonstrado para o espaço de funções contínuas definidas sobre a reta e tomando valores reais. No Capítulo 4 são apresentadas duas de suas aplicações: o Teorema da Função Implícita e o Teorema de Picard-Lidelöf, para Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem.

Por fim, no Capítulo 5, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é apresentado e demonstrado no caso $n = 2$, assim como os Lemas Combinatórios de Sperner. No fim do capítulo, é apresentado uma demonstração do Teorema do Valor Intermediário via o Teorema de Brouwer.

2 Requisitos Prévios

2.1 Sequências e Séries de Funções

Um dos estudos mais importantes de Análise na Reta é sobre as sequências de números reais. Todavia, podemos expandir tal conceito para as funções.

Considere $A \subset \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, uma função $f_n : A \to \mathbb{R}$. Diremos que (f_n) é uma *sequência de funções* de A para $\mathbb{R}$. Para cada $x \in A$ fixado, a sequência de funções torna-se uma sequência de números reais $f_n(x)_{n \in N}$. Para cada valor de x fixado, tal sequência pode divergir ou convergir para um único número real determinado por $\lim f_n(x)$.

Definição 2.1.1 (Convergência Pontual)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções de $A \subset \mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, seja $A_0 \subset A$, e seja $f : A_0 \to \mathbb{R}$. Dizemos que a *sequência* (f_n) *converge pontualmente em* A_0 *para* f se, para cada $\varepsilon > 0$ e para cada $x \in A_0$, existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ tal que se $n > n_0$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Neste caso, chamaremos f de *limite em* A_0 *da sequência* (f_n). Quando f existe, diremos que a sequência (f_n) *converge pontualmente em* A_0.

Em outras palavras, a sequência (f_n) converge pontualmente para f se, para cada $x \in A_0$ fixado, a sequência $(f_n(x))$ converge para $f(x)$. Como o limite de uma sequência de números reais é unicamente determinado, segue que o limite f de (f_n) em A_0 é único.

Simbolicamente, representaremos a convergência pontual por $f = \lim f_n$ pontualmente em A_0, ou $f_n \to f$ pontualmente em A_0.

Exemplo 2.1.1. Seja (f_n) sequência de funções em $\mathbb{R}$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f_n(x) := \dfrac{x}{n}$. Para cada $\varepsilon > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ fixado, segue que, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) := 0$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = |x| \cdot \frac{1}{n} \tag{2.2}$$

Como $(1/n) \to 0$ e x é fixado, segue que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$:

$$\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{|x|} \Rightarrow |x| \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{2.3}$$

Logo:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x| \cdot \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{2.4}$$

Logo, $(f_n) \to f$ pontualmente.

Exemplo 2.1.2. Seja (f_n) onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$. Fixado $x \in [0,1)$ tem-se que $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$. Por outro lado, para $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.

Deste modo, o limite pontual desta sequência é

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x = 1; \\ 0, & \text{se } x \in [0,1). \end{cases} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.1.3. Considere a sequência (f_m) de funções definidas por:

$$f_m(x) = \lim_{n\to+\infty} [\cos(m! \cdot \pi \cdot x)]^{2n} \tag{2.6}$$

Temos que, se $m! \cdot x$ for inteiro, $f_m(x) = 1$. Do contrário, $f_m(x) = 0$. Sendo assim, para todo $m \in \mathbb{N}$, $f_m(x)$ será descontínua apenas quando $m! \cdot x$ for um número inteiro.

Analisemos agora quando $m \to +\infty$. Se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $m! \cdot x$ será sempre um número irracional, logo $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = 0$.

Por outro lado, se $x \in \mathbb{Q}^+$, existem $p, q \in \mathbb{N}$, onde $mdc(p,q) = 1$, tais que $x = p/q$ (em outras palavras, p/q é a representação de x como fração irredutível). Como $m \to +\infty$, segue que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m_0 > q$. Daí, para todo $m > m_0$, então:

$$m! \cdot x = m \cdot (m-1) \cdot ... \cdot q \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{p}{q} = m \cdot ... \cdot (q+1) \cdot (q-1) \cdot ... \cdot 2 \in \mathbb{Q} \tag{2.7}$$

Isto é, se $m > m_0$, $f_m(x) = 1$ e $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = 1$. De forma análoga pode-se concluir o mesmo para $x \in Q^-$ e $x = 0$. Obtemos então que

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = \begin{cases} 1, \ \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, \ \text{se } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} = f(x) \tag{2.8}$$

O Exemplo 2.1.2 ilustra que nem toda sequência de funções contínuas converge pontualmente para uma função contínua, e o Exemplo 2.1.3 que nem toda sequência de funções integráveis converge pontualmente para uma função integrável. Além disso, a convergência pontual exige que a sequência seja analisada em cada ponto $x \in A_0$, tarefa a qual pode ser de difícil realização. Uma nova definição de convergência para sequências de funções torna-se necessária, a fim de se corrigir estes e outros problemas da convergência pontual que não foram abordados neste trabalho.

Definição 2.1.2 (Convergência Uniforme)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções de $A \subset \mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$, seja $A_0 \subset A$ e seja $f : A_0 \to \mathbb{R}$. Dizemos que a *sequência* (f_n) *converge uniformemente em* A_0 *para* f se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que se $n > n_0$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in A_0 \tag{2.9}$$

A primeira vista, ambas as definições de convergência são parecidas, porém, a convergência uniforme exige que o número natural n_0 independa do ponto $x \in A_0$. Este detalhe é de grande importância e será inúmeras vezes utilizado no estudo da convergência de sequências de funções. Em alguns textos, a convergência uniforme é dita *convergência forte*, enquanto a convergência pontual é dita *convergência fraca* ou *convergência simples*.

Simbolicamente, representaremos a convergência uniforme por $f = \lim f_n$ uniformemente em A_0, ou $f_n \to f$ uniformemente em A_0.

Decorre das definições que a convergência uniforme implica na convergência pontual. Todavia, convergência pontual não implica na convergência uniforme.

Exemplo 2.1.4. A sequência (f_n) onde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f_n := \dfrac{x}{n}$.

Sendo $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Se $n > n_0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon \tag{2.10}$$

Como ε foi arbitrário e n_0 independe de x, segue que $f_n \to f$ uniformemente.

Exemplo 2.1.5. A sequência (f_n) onde $f_n : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_n : \dfrac{x}{n}$.

Sendo $f(x) := 0$, fixe $\varepsilon = 1$. Suponha que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geqslant n_0$:

$$|f_n(x) - f(x)| < 1, \ \forall x \in (0, +\infty) \tag{2.11}$$

Fixe $n = n_0 + 1$ e tome $x = n_0 + 2$:

$$|f_{n_0+1}(n_0 + 2) - f(n_0 + 2)| = \frac{n_0 + 2}{n_0 + 1} > 1 \tag{2.12}$$

Daí, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, existe $n > n_0$ e x_n tais que $|f_n(x_n) - f(x_n)| > 1$, isto é, (f_n) não converge uniformemente para f.

Observe que a sequência (f_n) do Exemplo 2.1.2 converge pontualmente para f, mas não converge uniformemente. De fato, tomando $\varepsilon = 1/2$, para todo $n_o \in \mathbb{N}$ existe um $x \in [0, 1)$ tal que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| = |x^{n_0} - 0| \geqslant \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

isto decorre do fato de que $\lim_{x \to 1^-} x^{n_0} = 1$. Logo, (f_n) não converge uniformemente para f em $[0, 1]$.

Através destes últimos exemplos nota-se que o conjunto A onde as funções estão definidas influencia na convergência uniforme.

Um questionamento natural sobre a convergência uniforme é se ela permite estabelecer critérios e propriedades quanto à continuidade das funções envolvidas.

Proposição 2.1.1. *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas, definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se (f_n) converge uniformemente para f, então f é uma função contínua.*

Demonstração. Seja $a \in I$ fixado. Mostraremos que f é contínua em a.

Seja $\varepsilon > 0$. Para este ε, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant n_0$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall x \in I \tag{2.14}$$

Como, por hipótese, f_{n_0} é contínua segue que, para este ε, existe um $\delta > 0$ tal que se $|x - a| < \delta$ então

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.15}$$

Tome $x \in I$ tal que $|x - a| < \varepsilon$, então:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < \varepsilon \tag{2.16}$$

Logo f é contínua em $a \in I$. Como a foi tomado de modo arbitrário, segue que f é contínua em I. □

O resultado da 2.1.1 mostra que sob o olhar da convergência uniforme, o conjunto das funções contínuas é fechado. Tal conceito será abordado novamente no final da Subseção 2.2.1.

Até então, o conceito de sequência foi estendido para as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. É de se esperar que o mesmo ocorra com o conceito de séries.

Definição 2.1.3 (Séries de Funções)**.** Seja (f_n) uma sequência de funções definidas em $A \subset \mathbb{R}$. Chamaremos de *Soma Parcial da Série de Funções* a função $s_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$s_n(x) := f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x),\ \forall x \in A \tag{2.17}$$

A sequência de funções das Somas Parciais (s_n) é denominada por **Série de Funções**, cuja notação é $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Observe que para cada $x \in A$ a série $(s_n(x))$ é uma série numérica. Assim como nas séries numéricas, o estudo da convergência de uma série de funções se dá pela soma parcial.

Diremos que a série $\sum f_n$ *converge pontualmente* se a sequência de somas parciais (s_n) convergir pontualmente. De mesmo modo, diremos que uma série de funções *converge uniformemente* se a sua sequência de somas parciais convergir uniformemente.

Diremos que a série $\sum f_n$ converge *absolutamente* se a série $\sum |f_n|$ convergir. Se $\sum |f_n|$ convergir simplesmente (ou uniformemente), diremos que $\sum f_n$ converge absoluta e simplesmente (ou uniformemente).

Teorema 2.1.1 (Teste M de Weierstrass). *Dada a sequência de funções $f_n : A \to \mathbb{R}$, seja $\sum M_n$ uma série convergente de números reais $M_n \geqslant 0$ tais que $|f_n(x)| \leqslant M_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in A$. Nestas condições, a série $\sum f_n$ converge absoluta e uniformemente.*

Demonstração. Por hipótese $\sum M_n$ converge, logo para todo $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{j=n_0}^{+\infty} M_j < \varepsilon$.

Observe que

$$f_i(x) \leqslant |f_i(x)| \leqslant M_i, \ \forall x \in A, \forall i \in \mathbb{N} \tag{2.18}$$

Segue então que $\forall m > n_0$:

$$\sum_{j=n_0}^{m} f_j(x) \leqslant \sum_{j=n_0}^{m} |f_j(x)| \leqslant \sum_{j=n_0}^{m} M_j < \varepsilon, \ \forall x \in A \tag{2.19}$$

Como n_0 depende exclusivamente de ε, segue da definição que as séries $\sum |f_n|$ e $\sum f_n$ convergem uniformemente. Logo, a série $\sum f_n$ converge absoluta e uniformemente.

□

2.2 Espaço Vetorial Normado

2.2.1 Normas no Espaço Vetorial Normado

Sendo V um espaço vetorial, definiremos a noção de comprimento de um vetor, representada pela *norma*.

Definição 2.2.1 (Norma). A *norma* é uma função $||.|| : V \to \mathbb{R}$, que associa cada vetor $x \in V$ com um número real não-negativo, de modo que cumpre as seguintes condições:

Para qualquer $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $||x|| \geqslant 0||$, sendo que $||x|| = 0$ se e somente se $x = 0$;

2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;

3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

A seguir serão apresentadas algumas normas sobre espaços vetoriais.

Definição 2.2.2 (Norma euclidiana)**.** A *norma euclidiana* $||.||_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por

$$||x||_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \tag{2.20}$$

Exemplo 2.2.1. A norma euclidiana do vetor $u = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$ é $||u||_1 = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Definição 2.2.3 (Norma do máximo)**.** A *norma do máximo* $||.||_{\max} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por

$$||x||_{\max} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{|x_i|\} = \max\{|x_1|, |x_2|\} \tag{2.21}$$

Exemplo 2.2.2. A norma do máximo do mesmo vetor $u = (3, -4)$ é $||u||_{\max} = \max |3|, |-4| = 4$.

Definição 2.2.4 (Norma da soma)**.** A *norma do módulo* $||.||_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é definida por

$$||x||_2 = |x_1| + |x_2| \tag{2.22}$$

Exemplo 2.2.3. A norma do módulo de $u = (3, -4)$ é $||u||_2 = |3| + |4| = 7$.

Os exemplos anteriores mostram que em cada norma, o valor obtido de $||u||$ é diferente. Todavia, outras propriedades são preservadas entre elas, como a continuidade de uma função, por exemplo. Tais propriedades fogem do objetivo deste trabalho, mas um leitor mais interessado pode consultar o livro *Espaços Métricos*, de Elon Lages Lima [1].

Um último conceito de norma, mas não menos importante, versa sobre o Espaço das Funções em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.5 (Norma do Supremo)**.** Considere $X = [a, b]$ e $C(X)$ o espaço das Funções limitadas $f : X \to \mathbb{R}$. Define-se como *norma do supremo* a função $||.||_{\sup}$ como

$$||f||_{\sup} = \sup_{x \in X} |f(x)| \tag{2.23}$$

Diferente das normas apresentadas anteriormente, a norma do supremo relaciona não vetores de V, mas sim as funções sobre $\mathbb{R}$. Este conceito de norma é necessário para o entendimento do Teorema de Banach, no Capítulo 3.

Exemplo 2.2.4. Em $C(X)$, onde $X = [0, 2\pi]$, a norma do supremo da função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é $||f||_{\sup} = \sup_{x \in X}\{|\operatorname{sen}(x)|\} = 1$.

Considere $X = [a, b]$ e $C(X)$ como na Definição 2.2.5, pode-se verificar que $||f||_{\sup} = \sup_{x \in X} |f(x)|$ é uma norma em $C(X)$ (vide [1]). Note que isto significa que $\forall \varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X \tag{2.24}$$

Logo $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, donde $||f_n - f||_{\sup} < \varepsilon$.

Ou seja, a convergência na norma do supremo é equivalente à convergência uniforme. Neste contexto, o conjunto $C(X)$ é fechado segundo a norma do supremo.

2.2.2 Bolas no Espaço Vetorial Normado

Em analogia à Reta Real, as bolas em V são a generalização dos intervalos em $\mathbb{R}$.

Definição 2.2.6 (Bola aberta)**.** A *bola aberta* de centro no ponto $a \in V$ e raio r, denotada por $B(a; r)$, é o conjunto dos vetores de V tal que a distância até a é menor que r, isto é:

$$B(a; r) = \{x \in V; ||x - a|| < r\} \tag{2.25}$$

Definição 2.2.7. A *bola fechada* de centro no ponto $a \in V$ e raio r, denotada por $B[a; r]$, é o conjunto dos pontos de V tal que a distância até a é menor ou igual a r, isto é:

$$B[a; r] = \{x \in V; ||x - a|| \leqslant r\} \tag{2.26}$$

Em outras palavras, a bola aberta é o "equivalente" ao intervalo aberto em $\mathbb{R}$, e a bola fechada, ao intervalo fechado. A bola aberta $B(a; r)$ também pode ser referida por $r-$vizinhança de a.

Observe que as definições de bola utilizam a definição de norma. Sendo assim, por exemplo, uma bola aberta $B(a;r)$ pode representar conjuntos diferentes, dependendo da norma utilizada (Figura 2.1).

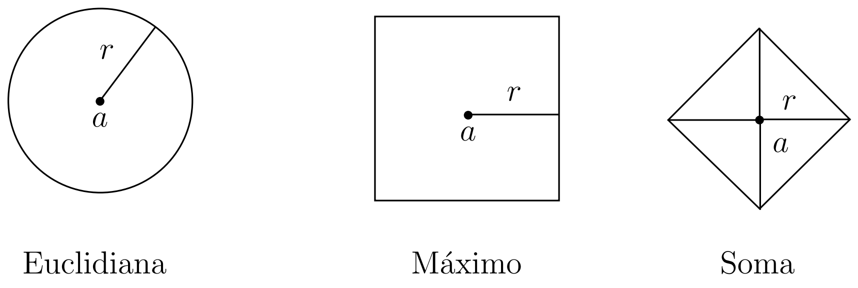

Figura 2.1: $B[a;r]$, dependendo da norma. (Fonte: Adaptado de [1], página 11.)

2.2.3 Limites e Continuidade no Espaço Vetorial Normado

Os conceitos de limite e continuidade em espaços vetoriais são muito semelhantes as definições na Reta Real, apenas com a ressalva da norma utilizada.

Definição 2.2.8 (Limite de uma função)**.** Seja $f : A \subset V \to V$. L é dito o *limite* de f em $a \in A$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in A$, então

$$||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - L|| < \varepsilon \tag{2.27}$$

Notação: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Definição 2.2.9 (Função contínua)**.** Seja $f : A \subset V \to \mathbb{R}^2$. f é dita *contínua* em $a \in A$ se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in A$, então

$$||x - a|| < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \varepsilon \tag{2.28}$$

Isto é, quando $\lim\limits_{x \to a}$ existe e é igual a $f(a)$.

2.2.4 Funções Lipschitzianas e Contrações

Definição 2.2.10 (Função Lipschitziana)**.** Uma função $f : A \to B$ é chamada *Lipschitziana* quando existe um $c > 0$ tal que

$$||f(x) - f(y)|| \leqslant c \cdot ||x - y||, \ \forall x, y \in A \tag{2.29}$$

O número c é chamado de *constante de Lipschitz* de f. Quando $0 < c < 1$, a função f é chamada de *contração*.

2.2.5 Conjuntos Compactos

Definição 2.2.11 (Conjunto Compacto)**.** Seja $Q \subset V$, diremos que Q é *compacto* se, para toda sequência (x_n) em Q, (x_n) admite uma subsequência (x_{n_k}) convergente.

3 Teorema do Ponto Fixo de Banach

Stefan Banach (1892-1945) foi um matemático polonês, com grandes contribuições nos campos da *Análise Funcional* e *Teoria da Medida*, esta última área onde desenvolveu seu doutorado, formado pela Faculdade de Engenharia de Lviv (hoje Ucrânia).

O Teorema do Ponto Fixo de Banach, também conhecido por *Teorema da Contração Uniforme*, ou ainda por *Princípio da Contração de Banach*, apareceu na tese de Ph.D de Banach em 1920 (e publicado em 1922). Considerado um dos mais importantes resultados da Análise, é aplicado em diversas áreas da Matemática. O Princípio da Contração de Banach foi generalizado em diferentes direções ao longo dos anos.

Teorema 3.0.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach em $C(J)$)**.** *Sejam $J \subset \mathbb{R}$, $C(J)$ o conjunto das funções contínuas em J e $T : C(J) \to C(J)$ uma contração sob a norma do supremo, então existe uma, e somente uma função ϕ em $C(J)$ tal que*

$$T(\phi) = \phi \tag{3.1}$$

isto é, ϕ é o único ponto fixo de T.

Demonstração. Seja $\phi_0 \in C(J)$ uma função qualquer. Defina a sequência $\{\phi_n\}$ tal que:

$$\phi_{n+1} = T(\phi_n), \ \forall n = 0, 1, 2... \tag{3.2}$$

Considere agora o seguinte somatório:

$$\sum_{k=0}^{n+1} (\phi_{k-1} - \phi_k) = (\phi_1 - \phi_0) + (\phi_2 - \phi_1) + ... + (\phi_n - \phi_{n-1}) = \phi_n - \phi_0 \tag{3.3}$$

Podemos reescrever a Equação 3.3 como:

$$\phi_n = \phi_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\phi_{k+1} - \phi_k) \tag{3.4}$$

Pela hipótese de T ser contração, segue que existe um $0 < \alpha < 1$ tal que:

$$||T(\phi_n) - T(\phi_{n-1})||_{\text{sup}} \leqslant \alpha \cdot ||\phi_n - \phi_{n-1}||_{\text{sup}}, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.5}$$

Para simplificar a notação, até o fim da demonstração, a norma do supremo $||.||_{\text{sup}}$ será denotada simplesmente por $||.||$.

Afirmação 3.0.1. *Vale que*

$$||\phi_k - \phi_{k-1}|| \leqslant (||\phi_1|| + ||\phi_0||) \cdot \alpha^{k-1} \tag{3.6}$$

Provaremos tal afirmação via indução em k.

- $k = 1$*: Temos que:*

$$||\phi_1 - \phi_0|| \leqslant \alpha^0 \cdot (||\phi_1|| + ||\phi_0||) \tag{3.7}$$

- *Supondo a afirmação válida para algum $p \in \mathbb{N}$, isto é, $\exists \ p \in \mathbb{N}$;*

$$||\phi_p - \phi_{p-1}|| \leqslant (||\phi_1|| - ||\phi_0||) \cdot \alpha^{p-1} \tag{3.8}$$

Para $p + 1$:

$$||\phi_{p+1} - \phi_p|| = ||T(\phi_p) - T(\phi_{p-1})|| \leqslant \alpha \cdot ||\phi_p - \phi_{p-1}|| \leqslant \alpha \cdot \alpha^{p-1} \cdot (||\phi_1|| - ||\phi_0||) \tag{3.9}$$

$$\Rightarrow ||\phi_{p+1} - \phi_p|| \leqslant \alpha^p \cdot (||\phi_1|| - ||\phi_0||) \tag{3.10}$$

O que prova a afirmação.

Chamando $||\phi_1|| + ||\phi_0|| = M$, temos que a série dada por $M \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ é uma série geométrica, logo convergente quando $0 \leqslant \alpha < 1$.

Pela Afirmação 3.0.1, $||\phi_k - \phi_{k-1}|| \leqslant M \cdot \alpha^{k-1}$, e pelo Teste M de Weierstrass (Teorema 2.1.1, página 13) a série $\sum_{k=0}^{\infty}(\phi_{k+1} - \phi_k)$ converge uniformemente, e pela Equação 3.4, $\{\phi_n\}$ também converge uniformemente para uma função ϕ definida por

$$\phi(x) := \lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \phi_0(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\phi_{k+1}(x) - \phi_k(x)) \tag{3.11}$$

Por construção, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n \in C(J)$, então pela Proposição 2.1.1 (página 11) segue que $\phi \in C(J)$.

Afirmação 3.0.2. *ϕ é o ponto fixo de T.*

De fato, como T é contração, vale que:

$$||T(\phi) - \phi_{n+1}|| = ||T(\phi) - T(\phi_n)|| \leqslant \alpha \cdot ||\phi - \phi_n||, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.12}$$

Pela Equação 3.11, temos que:

$$||\phi - \phi_n|| = \left|\left|\phi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\phi_k - \phi_{k-1}) - \phi_0 - \sum_{j=1}^{n}(\phi_j - \phi_{j-1})\right|\right| = \left|\left|\sum_{k=n}^{\infty}(\phi_k - \phi_{k-1})\right|\right| \tag{3.13}$$

Pela desigualdade triangular, segue que:

$$||\phi - \phi_n|| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} ||\phi_k - \phi_{k-1}|| \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}(M \cdot \alpha^{k-1}) \tag{3.14}$$

Daí, pela Equação 3.12:

$$||T(\phi) - \phi_{n+1}|| \leqslant \alpha \cdot M \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{k-1} = \frac{M \cdot \alpha^n}{1 - \alpha} \tag{3.15}$$

Como $\alpha^{n-1} \to 0$ quando $n \to +\infty$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} ||T(\phi) - \phi_{n_1}|| = 0$.

$$T(\phi) = \lim_{n\to\infty} \phi_{n+1} = \phi \tag{3.16}$$

Provando a Afirmação 3.0.2.

Para terminar a prova do teorema, basta mostrar que o ponto fixo é único.

Afirmação 3.0.3. *O ponto fixo ϕ de T é único.*

De fato, suponha que $\phi, \psi \in C(J)$ são pontos fixos de T, temos que:

$$||\phi - \psi|| = ||T(\phi) - T(\psi)|| \leqslant \alpha \cdot ||\phi - \psi|| \tag{3.17}$$

Como $\alpha < 1$ e o módulo é não-negativo, segue que:

$$||\phi - \psi|| - \alpha \cdot ||\phi - \psi|| \leqslant 0 \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow (1 - \alpha) \cdot ||\phi - \psi|| \leqslant 0 \tag{3.19}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant ||\psi - \phi|| \leqslant 0 \Rightarrow \phi = \psi \tag{3.20}$$

Logo, o ponto fixo de T é único, provando o teorema.

□

A demonstração acima consiste no chamado Método de Iteração. Elege-se um ponto arbitrário ϕ_0 do conjunto, e aplica-se T: se $T(\phi_0) = \phi_0$, o ponto fixo foi encontrado. Do contrário, toma-se como $\phi_1 = T(\phi_0)$, e o processo se repete indefinidamente, formando a sequência $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Verifica-se se a sequência é convergente, e sendo assim, seu limite será o ponto fixo ϕ. O passo seguinte é garantir que este ponto é único, encerrando a demonstração.

O Teorema de Banach pode ser re-escrito em contexto mais geral, substituindo o conjunto $C(J)$ por um espaço métrico fechado (vide [1]). A escolha pelo $C(J)$ é devido a aplicação em EDO, no capítulo a seguir.

4 Aplicações do Teorema de Banach

4.1 Teorema da Função Implícita

Na Matemática, e principalmente no Cálculo, existem situações onde um problema se resume a encontrar soluções em uma equação com mais de uma variável, como por exemplo na Equação 4.1.

$$y = x^2 + 2x \tag{4.1}$$

Na Equação 4.1, a variável y está explicitamente descrita como uma função da variável x. Todavia, nem sempre isso é facilmente verificável, como na Equação 4.2.

$$x^6 - 2x = 3y^6 + y^5 - y^2 \tag{4.2}$$

Além disso, é possível ainda que exista mais de uma função $Y(x) = y$ que seja solução da Equação 4.2.

Neste caso, a função $Y(x) = y$ está definida implicitamente na Equação 4.2.

O Teorema da Função Implícita dá condições suficientes para que uma equação de funções implícitas tenha solução. Em outras palavras, é o teorema que define as condições para que uma equação $F(x, y) = 0$ possua alguma solução $y = Y(x)$.

A versão do caso bi-dimensional é apresentada a seguir.

Teorema 4.1.1 (Existência da Função Implícita)**.** *Seja f uma função definida em uma faixa R:*

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leqslant x \leqslant b, -\infty < y < +\infty\}$$

onde a derivada parcial $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe e é limitada, isto é, satisfaz a seguinte desigualdade:

$$0 < m \leqslant f_y(x, y) \leqslant M, \ \forall (x, y) \in R \ e \ m, M \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

E, além disso, se para cada função $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, a composição $g(x) = f(x, \phi(x))$ for contínua em $[a, b]$, então existe uma e somente uma função $y = Y(x)$ contínua em $[a, b]$ tal que $f(x, Y(x)) = 0$.

Demonstração. Seja $C = C([a, b])$ o espaço vetorial das funções contínuas no intervalo $[a, b]$. Defina a função $T : C \to C$ tal que:

$$T(\phi)(x) = \phi(x) - \frac{1}{M} \cdot f(x, \phi(x)) \tag{4.4}$$

Mostraremos que T é uma contração em C. Considere a diferença a seguir:

$$T(\phi)(x) - T(\psi)(x) = \phi(x) - \psi(x) - \frac{f(x, \phi(x)) - f(x, \psi(x))}{M} \tag{4.5}$$

Para cada x fixado, o Teorema do Valor Médio[1] garante que existe $z(x)$ entre $\phi(x)$ e $\psi(x)$ tal que:

$$(\phi(x) - \psi(x)) \cdot f_y(x, z(x)) = f(x, \phi(x)) - f(x, \psi(x)) \tag{4.6}$$

Substituindo na Equação 4.4:

$$T(\phi)(x) - T(\psi)(x) = (\phi(x) - \psi(x)) \cdot \left(1 - \frac{f_y(x, z(x))}{M}\right) \tag{4.7}$$

Pela Equação 4.3, segue que:

$$0 \leqslant 1 - \frac{f_y(x, z(x))}{M} \leqslant 1 - \frac{m}{M} \tag{4.8}$$

Então, pelas equações 4.7 e 4.8:

$$|T(\phi)(x) - T(\psi)(x)| \leqslant |\phi(x) - \psi(x)| \cdot \left(1 - \frac{m}{M}\right) \tag{4.9}$$

[1]Observe que para x fixado, $f(x, y)$ pode ser interpretada como uma $f(y) = f(x, y)$, e sendo assim, o Teorema do Valor Médio pode ser utilizado no contexto de uma variável

Para todo $x \in [a,b]$. Como $m \leqslant M$, segue que $0 \leqslant 1 - \dfrac{m}{M} < 1$, logo T satisfaz a condição de ser uma contração.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, segue que T admite um único ponto fixo $Y = Y(x)$. Logo:

$$Y(x) = T(Y)(x) = Y(x) - \frac{1}{M} f(x, Y(x)) \tag{4.10}$$

$$\Rightarrow f(x, Y(x)) = 0, \ \forall x \in [a,b] \tag{4.11}$$

Como queríamos demonstrar.

□

A condição $f(x, Y(x)) = 0$ serve para definir $y = Y(x)$ implicitamente como função de x no intervalo $[a,b]$.

4.2 Equações Diferenciais e o Teorema de Picard

Uma equação diferencial, como o nome sugere, é uma equação que envolve derivadas de uma função em sua composição. Em tais equações, busca-se como solução uma função.

As Equações Diferenciais, ou simplesmente *ED*'s, são amplamente utilizadas nas mais diversas áreas da Ciência, como as Leis de Newton na Física ou modelagem dos batimentos cardio-vasculares na Biologia. Na própria Matemática, as ED's aparecem nos ramos da Topologia, Geometria Diferencial e Cálculo, entre outros. Desde o século XVIII, as Equações Diferenciais compõem um ramo próprio dentro da matemática.

Como possuem diversas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, é natural que no estudo das ED's procure-se encontrar sob quais condições elas possuem solução, e quando esta solução é única.

Neste capítulo será apresentado um caso particular do Teorema de Picard, sobre a existência e unicidade de solução de uma Equação Diferencial, utilizando o Teorema do Ponto Fixo de Banach apresentado no Capítulo 3.

4.2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Definição 4.2.1 (Equação Diferencial Ordinária)**.** Define-se como uma *Equação Diferencial Ordinária*, ou simplesmente uma *EDO*, uma equação na forma:

$$a_0 \cdot y(x) + a_1 \cdot y'(t) + a_2 \cdot y''(t) + ... + a_n \cdot y^{(n)}(x) = g(x) \tag{4.12}$$

Onde $y : A \to \mathbb{R}$ é a incógnita procurada, $y^{(i)}$ é a i-ésima derivada de y, $g : A \to \mathbb{R}$ e $a_i : A \to \mathbb{R}$ são funções conhecidas.

Uma outra forma de escrever a Equação 4.12 é

$$y^{(n)}(x) = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{4.13}$$

Isto é, isolar a derivada de maior grau, e denotar o resto da equação como uma F.

Iremos nos restringir as EDO's de primeira ordem ($n = 1$), isto é, as equações da forma

$$y'(x) = F(x, y) \tag{4.14}$$

4.2.2 Teorema de Picard-Lidelöf

O Teorema de Picard-Lidelöf versa condições suficientes para a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais. O nome deste teorema é em homenagem aos matemáticos Ernst Leonard Lindelöf (1870-1946) e Charles-Émile Picard (1856-1914) . Lindelöf foi um matemático finlandês e membro da Sociedade Finlandesa de Ciências e Letras, e Picard foi um matemático francês, conhecido por suas contribuições na geometria algébrica, variáveis complexas e equações diferenciais. A generalização do Teorema de Existência e Unicidade é creditada à Picard.

Em alguns locais do globo, sobretudo na França, este teorema é conhecido como Teorema de Cauchy-Lipschitz.

Neste trabalho é apresentado o Teorema de Picard-Lidelöf para problemas de valor inicial de primeira ordem.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Picard-Lidelöf (caso particular))**.** *Seja*

$$Q := [y_0 - a, y_0 + a] \times [t_0 - b, t_0 + b] \tag{4.15}$$

e $f : Q \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$|f(x,t) - f(y,t)| \leqslant L \cdot |x - y|, \ \forall x, y, t \in \mathbb{R} \tag{4.16}$$

Para algum $L > 0$. Então existe um número $h > 0$ tal que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

admite uma única solução no intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$.

Demonstração. Fixe um $h < \min\left\{\frac{L}{2}, b\right\}$. Defina o quadrado $Q' := [y_0 - a, y_0 + a] \times [t_0 - h, t_0 + h]$, e defina $T : C(Q') \to C(Q')$

$$T(y) := y_0 + \int_{t_0}^{|t|} f(y(s), s) \ ds \tag{4.18}$$

Observe que $C(Q') \subset C(Q)$ e, além disto, se $\phi(t)$ for ponto fixo de T, então ϕ é solução da Equação 4.17. Basta então provar que T é uma contração, e utilizar o Teorema de Banach.

Sejam $y_1(t)$ e $y_2(t) \in Q'$, então:

$$\begin{aligned}
||T(y_1) - T(y_2)|| &= \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left| \left\{ \int_{t_0}^{|t|} f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s) \ ds \right\} \right| &(4.19)\\
&\leqslant \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\{ \left| \int_{t_0}^{|t|} f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s) \ ds \right| \right\} &(4.20)\\
&\leqslant \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\{ \int_{t_0}^{|t|} |f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s)| \ ds \right\} &(4.21)\\
& &(4.22)
\end{aligned}$$

Por hipótese, $|f(y_1(s), s) - f(y_2(s), s)| \leqslant L \cdot |y_1(s) - y_2(s)|$, logo:

$$||T(y_1) - T(y_2)|| \leqslant \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \left\{ \int_{t_0}^{|t|} L \cdot |y_1(s) - y_2(s)| \; ds \right\} \tag{4.23}$$

$$\leqslant L \cdot ||t| - t_0| \cdot \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + h]} \{ |y_1(s) - y_2(s)| \} \tag{4.24}$$

$$\leqslant L \cdot 2h \cdot ||y_1 - y_2|| \tag{4.25}$$

Como $h < L/2$, segue que $(L \cdot 2h) <$, logo T é uma contração, e disto existe uma única $\phi(t)$ tal que $T(\phi) = \phi$, isto é

$$\phi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{|t|} f(\phi(s), s) \; ds \tag{4.26}$$

E, consequentemente, $\phi(t)$ é a única função que satisfaz a Equação 4.17 $\square$

5 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Luitzen Brouwer (1881-1966), foi um matemático holandês, trabalhou nas áreas da Topologia e Análise Complexa, entre outros.

Proposto por Brouwer e provado em 1912, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, assim como o Teorema de Banach, é um importante resultado na matemática, com diversas generalizações.

Segundo Sehie Park [2], existem dúvidas sobre a data da primeira aparição do teorema. Antes da de sua publicação já existiam referências a seu teorema.

Em sua redação publicada por Brouwer em 1910, o teorema diz: *toda aplicação contínua de um n-simplex em si mesmo tem um ponto fixo.* Intuitivamente, um n-simplex é o polígono mais simples de n dimensões. Por exemplo, o triângulo é um 2-simplex, e o tetraedo é um 3-simplex.

Em uma outra versão, o n-simplex é substituído por uma bola do $\mathbb{R}^n$. Sendo assim, o teorema de Brouwer, é reescrito como:

Teorema 5.0.1. *Toda aplicação contínua $f : B^n \to B^n$, onde B^n é uma bola fechada em $\mathbb{R}^n$, tem um ponto fixo.*

Apesar de seu enunciado simples, a demonstração do teorema nesta versão possui pré-requisitos que fogem do objetivo deste trabalho. Sendo assim, no presente capítulo, provaremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no caso $\mathbb{R}^2$. Para tal, primeiro serão apresentados os Lemas Combinatórios de Sperner.

Os Lemas de Sperner e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer são fortemente ligados. Propostos em 1928, os Lemas de Sperner foram utilizados para provar o Teorema do trio de matemáticos poloneses Bronislaw Knaster, Kazimierz Kuratowski e Stefan Mazurkiewicz. O Teorema KKM, como ficou conhecido, foi utilizado em 1929 para obter uma das provas mais diretas do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Em 1974, Mark Yoseloff apresentou uma demonstração dos resultados de Sperner via Teorema de Brouwer. Desse modo, os Lemas de Sperner, o Teorema KKM e o Teorema de Brouwer formam uma trindade de equivalências matemáticas [3].

5.1 Os Lemas Combinatórios de Sperner

Emanuel Sperner (1905-1980) foi um matemático alemão e professor de diversas universidades ao longo de sua vida. Na Matemática, desenvolveu os Lemas Combinatórios de Sperner.

Nesta seção, serão apresentados os lemas em suas versões mais simples, mas ainda assim essenciais e suficientes para a demonstração do caso $n = 2$ do teorema de Brouwer.

Os enunciados, assim como as demonstrações a seguir, são adaptadas do livro *Fixed Points*, de Yu. A. Shashkin [4].

Lema 5.1.1 (Primeiro Lema de Sperner para um Intervalo Fechado)**.** *Suponha que um número finito de pontos subdivide um intervalo fechado em intervalos menores. O ponto-extremo esquerdo do intervalo original é rotulado como 0, e o ponto-extremo direito como 1. Cada um dos demais pontos no interior do intervalo original são rotulados como 0 ou 1. Então, existe um intervalo das subdivisões que seus pontos-extremos são rotulados por números diferentes. Este tipo de intervalo será chamado de "intervalo aceitável" e, além disso, o número de intervalos desse tipo é ímpar.*

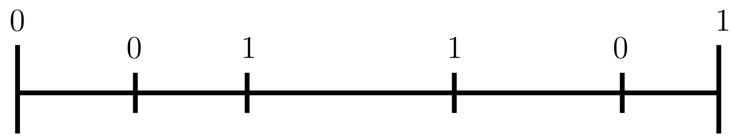

Figura 5.1: Primeiro Lema de Sperner: Um exemplo de intervalo subdividido. Observe que o segundo, quarto e quinto sub-intervalos são *intervalos aceitáveis.* (Fonte: Própria)

Demonstração. Primeiro provaremos a existência do intervalo aceitável, e após isso, que a sua paridade é ímpar.

Existência: Há duas possibilidades, todos os pontos interiores são rotulados como 0 ou pelo menos um deles é rotulado por 1.

No primeiro caso há exatamente um intervalo aceitável, que é o da extrema-direita (Figura 5.2).

No segundo caso, contando da esquerda para a direita, considere o primeiro ponto rotulado por 1, o intervalo onde ele é o ponto-extremo direito é um intervalo aceitável (Figura 5.3).

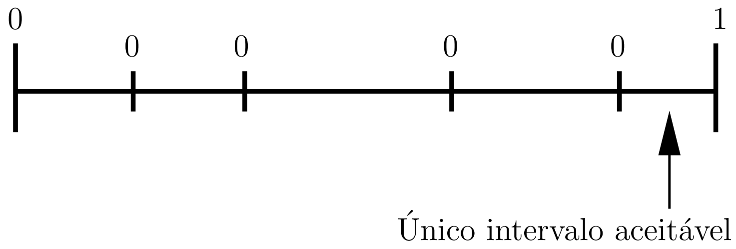

Figura 5.2: Caso onde todos os pontos interiores são rotulados por 0 (Fonte: Própria).

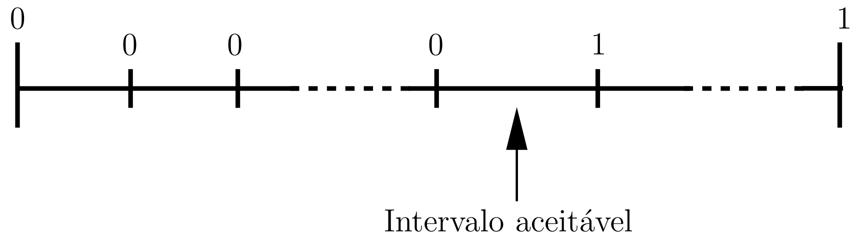

Figura 5.3: Caso onde há pelo menos um ponto rotulado por 1 (Fonte: Própria).

Paridade ímpar: Provaremos via indução.

- **P(1):** Suponha que não existam pontos interiores, logo o intervalo original é o único aceitável.

Figura 5.4: Caso onde não existem pontos interiores. O intervalo original é o único aceitável. (Fonte: Própria)

- **Hipótese de indução:** Seja um intervalo subdividido em n sub-intervalos. Supondo que o lema seja verdadeiro para k-sub-intervalos, onde $k < n$, mostraremos que vale para n sub-intervalos.

- **Indução:** Seja um intervalo com n sub-intervalos. Contando da esquerda para a direita, considere o primeiro ponto rotulado por 1, o sub-intervalo onde esse é o ponto-extremo direito é o primeiro intervalo aceitável.

  A partir dele, temos duas opções: existe um próximo ponto rotulado por 0, ou não. Se não existir, logo o número de intervalos aceitáveis é 1, ou seja, ímpar. Considere que exista um próximo ponto rotulado por 0, o sub-intervalo onde esse é o ponto-extremo esquerdo é o segundo intervalo aceitável.

Considerando a parte do intervalo original restante, isto é, entre o zero do segundo intervalo aceitável e o 1 do intervalo original. Pela hipótese de indução, nesse subconjunto há um número m ímpar de intervalos aceitáveis. Logo, ao todo temos $2+m$, um número ímpar, de sub-intervalos aceitáveis. A Figura 5.5 ilustra a situação.

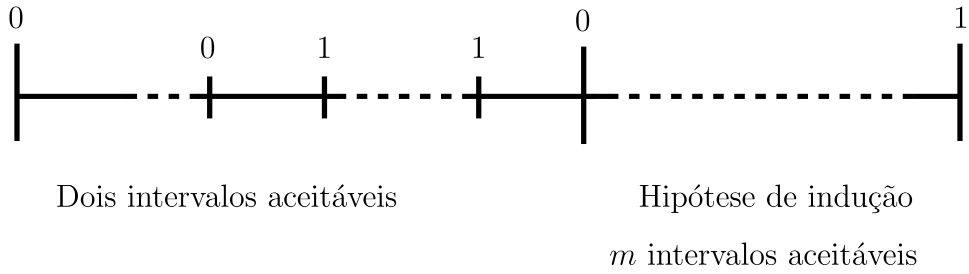

Figura 5.5: Indução em n sub-intervalos: os dois primeiros intervalos aceitáveis, à esquerda, e após o segundo intervalo aceitável, recai na hipótese de indução, finalizando a demonstração (Fonte: Própria).

Sendo assim, o lema está provado. □

O próximo Lema de Sperner trata-se de uma caminhada pelos quartos de uma casa. Para tal, precisamos das seguintes definições:

Definição 5.1.1 (Cantos-mortos)**.** Na caminhada de uma casa, um canto-morto é um quarto que possui apenas uma porta.

Definição 5.1.2 (Quarto de comunicação)**.** É um quarto com exatamente duas portas.

Definição 5.1.3 (Porta externa)**.** Uma porta externa é aquela que liga um quarto à parte externa da casa.

Definição 5.1.4 (Porta interna)**.** É uma porta que liga um quarto à outro quarto.

A Figura 5.6 ilustra um exemplo das definições acima.

Lema 5.1.2 (Segundo Lema de Sperner, ou a Caminhada pelos Quartos de Uma Casa)**.** *Suponha que qualquer quarto de uma casa tem 0, 1 ou 2 portas. Então o número de cantos-mortos e o número de portas externas tem a mesma paridade.*

Demonstração. Podemos assumir que dois quartos não tem mais de uma porta de comunicação em comum. Descrevemos o seguinte processo de caminhada pela casa:

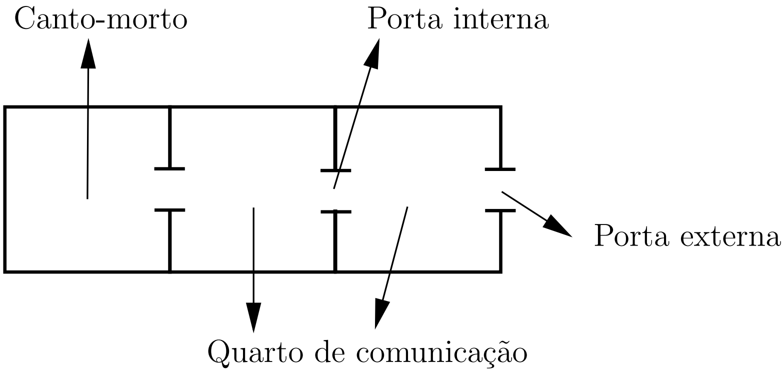

Figura 5.6: Segundo Lema de Sperner: Uma simples representação de uma casa e seus cantos-mortos, quartos de comunicação e portas externas e internas. (Fonte: Própria)

- Qualquer porta só pode ser atravessada uma única vez;
- Cada caminhada começa entrando na casa por uma porta externa ou por um canto-morto. A caminhada segue através dos quartos de comunicação e termina em: um canto-morto ou em uma porta externa;
- O número de portas em cada quarto define unicamente a caminhada: ao entrar em um quarto de comunicação por uma porta, somente podemos sair pela outra.
- Após terminar uma caminhada, outra se inicia, até que se esgote todos os cantos-mortos ou portas externas para uma nova caminhada.

Sendo assim, temos três opções para cada caminhada:

1. A caminhada começa em uma porta-externa e termina em um canto-morto, e vice-versa;
2. A caminhada começa em uma porta-externa e termina em outra porta externa;
3. A caminhada começa em um canto-morto e termina em outro canto-morto.

Sendo m, n e p o número de caminhadas das opções 1, 2 e 3, respectivamente. Uma caminhada da opção 1 corresponde a 1 porta externa e 1 canto-morto. Uma caminhada da opção 2 corresponde a 2 portas externas. Uma caminhada da opção 3 corresponde a 2 cantos-mortos. Desse modo, o número total de cantos-mortos é $m + 2p$, e o número total de portas externas é $m+2n$, e ambos os números tem a mesma paridade. $\square$

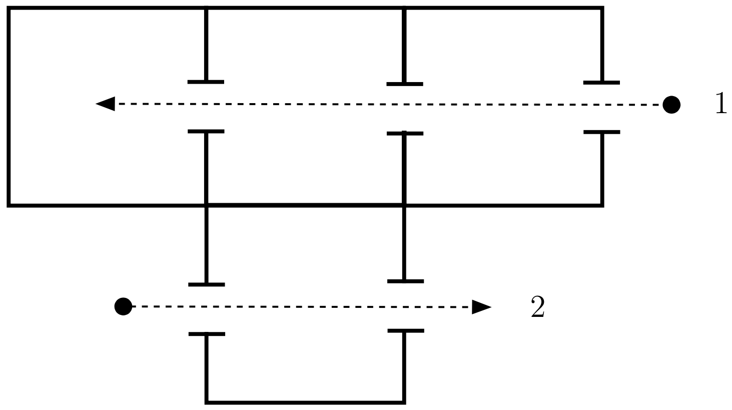

Figura 5.7: Exemplos de caminhada em uma casa, onde cada caminho começa no círculo, e termina na seta. (Fonte: Própria)

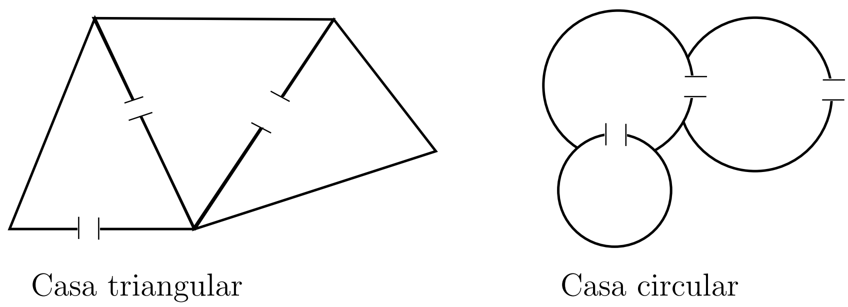

Figura 5.8: Exemplos de outras casas do segundo lema de Sperner. (Fonte: Própria)

Observe que é irrelevante o tamanho ou formato de cada quarto. Os quartos poderiam, por exemplo, serem triangulares, o que assumiremos no próximo lema.

Definição 5.1.5 (Triangulação)**.** Uma triangulação é uma sub-divisão de uma figura em triângulos, sob a seguinte condição: dois triângulos possuem nenhum ponto em comum, apenas um vértice em comum, ou apenas um lado em comum.

Denotaremos cada triângulo como face da triangulação, os lados do triângulo por bordas e os vértices por vértices da triangulação.

Com o conceito de triangulação, segue o Terceiro Lema de Sperner:

Lema 5.1.3 (Terceiro Lema de Sperner para Triangulações)**.** *Considere uma triangulação do triângulo T. Os vértices deste triângulo são rotulados por 1, 2 e 3. Os vértices da triangulação são rotulados pelos mesmos números, seguindo a seguinte condição de contorno: se um vértice pertence ao contorno do triângulo T, ele é rotulado por um dos dois números que rotulam os extremos deste lado. Os demais vértices do interior do triângulo são rotulados sem restrições.*

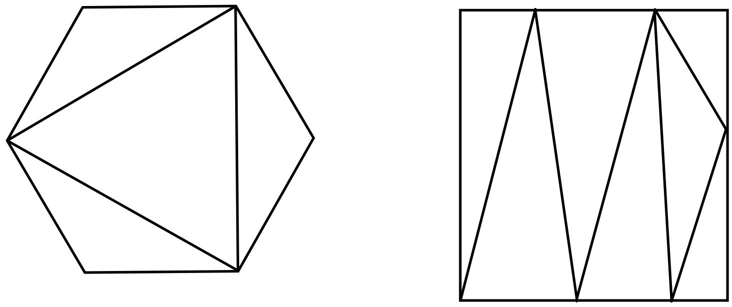

Figura 5.9: Exemplos de triangulação de um hexágono e um quadrado. Observe que os triângulos podem possuir diferentes tamanhos e não são necessariamente proporcionais.

Sendo assim, existe pelo menos uma face da triangulação cujos vértices são rotulados por diferentes números, isto é, por 1, 2 e 3. Além disso, a quantidade dessas faces é ímpar.

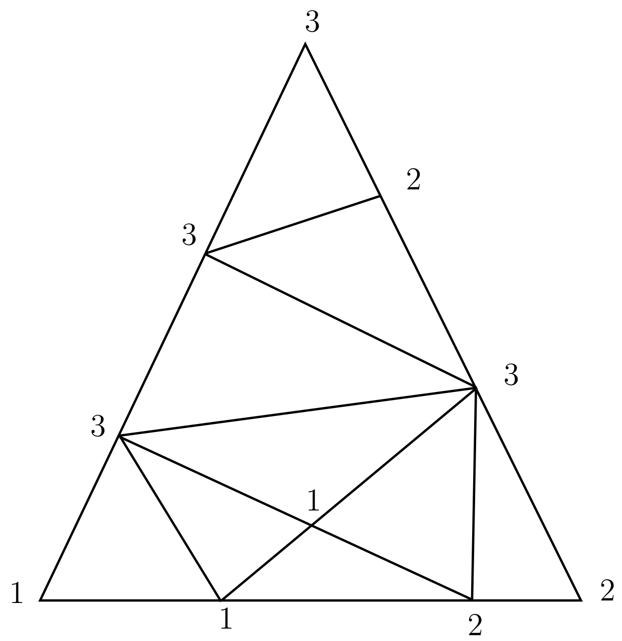

Figura 5.10: Exemplo de uma triangulação descrita pelo lema. Observe que há uma face da triangulação com três vértices cujos rótulos são distintos. (Fonte: Própria)

Demonstração. A demonstração será através do Lema 5.1.2, utilizando a estratégia de "andar pela casa". Definiremos a casa como o triângulo T, os quartos como as faces da triangulação, e as portas como as bordas das faces da triangulação, cujos extremos são rotulados por 1 e 2. Observe que para esta modelagem, não há diferença entre as bordas do tipo (1,2) e (2,1).

Cada face da triangulação possui as seguintes opções de rotulação: (1,1,1),

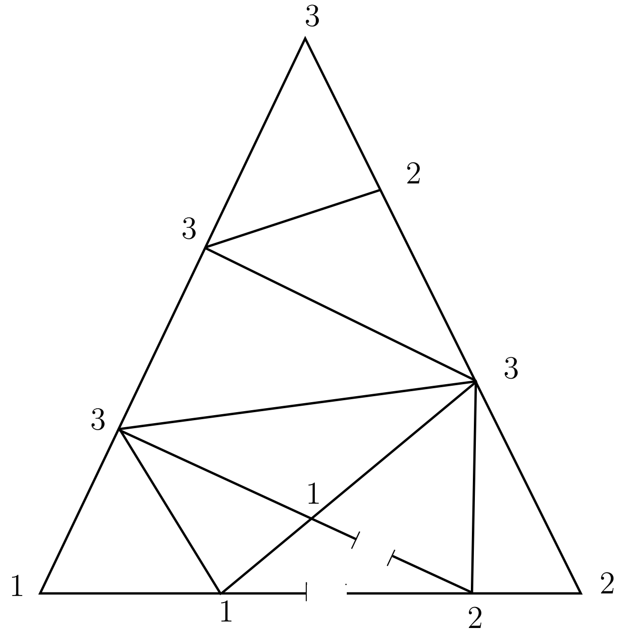

Figura 5.11: No exemplo da Figura 5.10, esta é a representação da casa, com suas portas internas e externas. (Fonte: Própria)

(1,1,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,3), (2,2,2), (2,2,3), (2,3,3) e (3,3,3). Evidentemente, os cantos-mortos serão apenas as faces do tipo (1,2,3). Do mesmo modo, os quartos de comunicação serão somente as faces do tipo (1,2,2) e (1,1,2), pois contém exatamente duas bordas do tipo (1,2).

A Tabela 5.1 resume a modelagem da triangulação como uma casa.

Tabela 5.1: Referenciação da Triangulação em uma casa

Na Triangulação	Na Casa
Face da triangulação	Quarto
Borda de uma face do tipo (1,2)	Porta
Borda de uma face do tipo (1,2) no contorno de T	Porta externa
Borda de uma face do tipo (1,2) no interior de T	Porta interna
Face do tipo (1,2,3)	Canto-morto
Face do tipo (1,1,2) ou (1,2,2)	Quarto de comunicação

Independente da escolha dos rótulos nos vértices da triangulação, temos que as faces da triangulação possuem no máximo duas bordas do tipo (1,2). Sendo assim, as condições do Lema 5.1.2 são satisfeitas, e segundo tal lema, a paridade de portas externas (bordas do tipo (1,2) no contorno de T) tem a mesma paridade de cantos-mortos (faces da triangulação do tipo (1,2,3)).

Como todas as portas externas (bordas do tipo (1,2)) encontram-se no lado de T cujos extremos são rotulados por 1 e 2, pelo Primeiro Lema de Sperner (Lema 5.1.1), há um número ímpar de intervalos da forma (1,2), isto é, um número ímpar de bordas do tipo (1,2) no contorno de T, e por conseguinte um número ímpar de faces da triangulação do tipo (1,2,3). $\square$

O último Lema de Sperner apresentado neste trabalho expande o Terceiro Lema de Sperner para um quadrado.

Lema 5.1.4 (Quarto Lema de Sperner - Triangulação do Quadrado)**.** *Seja Q um quadrado sub-dividido em pequenos quadrados com bordas paralelas aos lados originais. Os vértices dos quadrados são rotulados por 1, 2, 3 e 4. Os vértices das sub-divisões são rotulados pelos mesmos números, respeitando a seguinte condição de contorno: se um vértice de uma sub-divisão pertence ao contorno de Q, ele é rotulado por um dos dois números que rotulam os extremos deste lado. Os vértices no interior do quadrado são rotulados sem restrições.*

Então, existe pelo menos um pequeno quadrado rotulado por pelo menos 3 números diferentes.

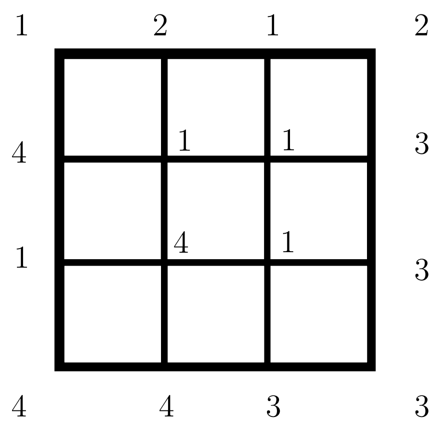

Figura 5.12: Exemplo de um quadrado, conforme as condições do Quarto Lema de Sperner. (Fonte: Própria)

Demonstração. Divida cada pequeno quadrado em dois triângulos, através de sua diagonal. Há então uma triangulação de Q, onde todos os vértices são rotulados. Modelando a triangulação como uma casa de modo semelhante ao problema anterior, definiremos como porta as bordas do tipo (1,2). Os cantos-mortos serão as faces rotuladas por 3 números diferentes, onde pelo menos dois deles sejam 1 e 2. Em outras palavras, um canto-morto será uma face do tipo (1,2,3) ou do tipo (1,2,4).

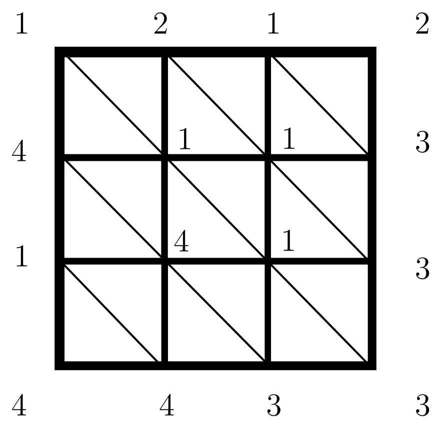

Figura 5.13: Triangulação do exemplo da Figura 5.13. (Fonte: Própria)

Por hipótese, todas as portas externas se encontram sob o lado de Q cujos extremos são rotulados por 1 e 2, logo, pelo Lema 5.1.1, há um número ímpar de portas externas, e pelo Lema 5.1.2, há um número ímpar de cantos-mortos, isto é, há pelo menos uma face da triangulação do tipo (1,2,3) ou (1,2,4). O pequeno quadrado ao qual esta face pertence possui pelo menos 3 rótulos diferentes, provando o lema. $\square$

Com todo os 4 Lemas de Sperner apresentados, pode-se finalmente provar o Teorema do Ponto Fixo e Brouwer para o caso $\mathbb{R}^2$.

5.2 Demonstração do Teorema de Brouwer

Uma vez que os Lemas de Sperner foram apresentados, é possível demonstrar o caso $n = 2$ do teorema.

Teorema 5.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no caso $\mathbb{R}^2$)**.** *Seja $Q := [0,1] \times [0,1]$ um quadrado contido no plano $\mathbb{R}^2$, e seja $f : Q \to Q$ uma função contínua. Então existe pelo menos um ponto p_0 tal que $f(p_0) = p_0$.*

Demonstração. Sejam $x_0 = (0,0)$, $y_0 = (1,0)$, $z_0 = (1,1)$ e $w_0 = (0,1)$ os vértices do quadrado Q .

Para cada ponto $p \in Q$, considere sua imagem $f(p)$. Defina o *vetor de dispersão de* p, denotado por $\overrightarrow{v(p)}$, o vetor de origem em p é destino em $f(p)$, e defina $\theta(p)$ o ângulo formado entre $\overrightarrow{v(p)}$ e o eixo $\overrightarrow{OX}$.

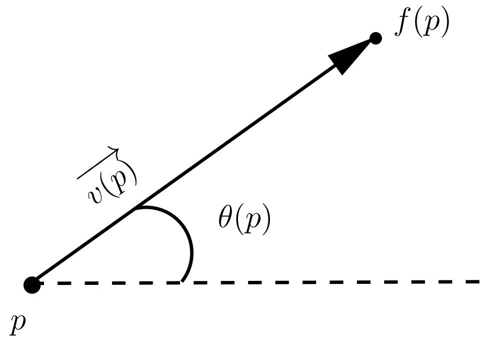

Figura 5.14: Ilustração do vetor dispersão e $\theta(p)$

Cada ponto de Q será rotulado de acordo com a Tabela 5.2. A Figura 5.15 ilustra a lógica da rotulação.

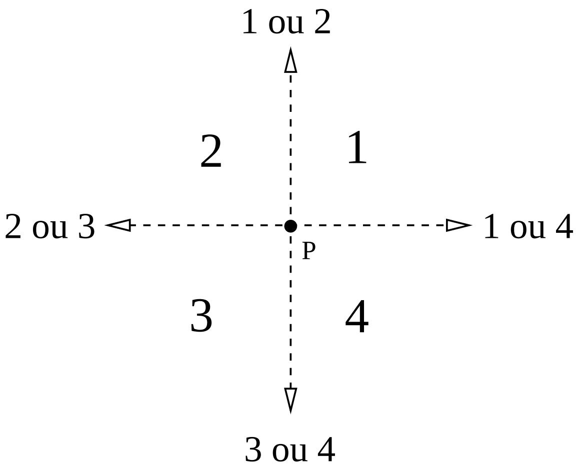

Figura 5.15: Com o ponto p a ser analisado no centro do diagrama, a sua rotulação se dará para onde seu vetor de dispersão apontar

Tabela 5.2: Rotulação

$\theta(p)$	Rótulo
$\theta(p) = 0$	1 ou 4
$0 < \theta(p) < \pi/2$	1
$\theta(p) = \pi/2$	1 ou 2
$\pi/2 < \theta(p) < \pi$	2
$\theta(p) = \pi$	2 ou 3
$\pi < \theta(p) < 3\pi/2$	3
$\theta(p) = 3\pi/2$	3 ou 4
$3\pi/2 < \theta(p) < 2\pi$	4

Em particular, x_0 poderá ser rotulado por 1, 2 ou 4. y_0 por 1, 2 ou 3, z_0 por 2, 3 ou 4 e w_0 por 1, 3 ou 4.

Sub-divida Q através das retas $r : x = 1/2$ e $s : y = 1/2$. Cada sub-quadrado será chamado de face da divisão, cada um de seus vértices de vértices da divisão, e cada um de seus lados por por bordas da divisão. Denote esta divisão por τ_1. Observe que cada borda desta divisão tem tamanho 1/2.

Se um dos vértices de τ_1 for ponto fixo de f, o teorema está provado. Do contrário, pelo Lema 5.1.4, existe uma face da divisão tal que pelo menos 3 de seus vértices possuem rótulos distintos entre si. Denote esta face por Q_1.

Novamente em Q, sub-divida-o em sub-quadrados cujas bordas da divisão medem $1/(2^2)$. Denote esta divisão por τ_2. Repetindo o processo anteriormente descrito, temos que:

- Um dos vértices de alguma τ_i divisão de Q é um ponto fixo de f, ou;
- Forma-se uma sequência de faces da divisão Q_n cujas bordas medem $\dfrac{1}{2^n}$.

Em cada Q_i, denote seus vértices por x_i, y_i, z_i e w_i. Tais vértices definem as seguintes sequências de pontos em Q: (x_n), (y_n), (z_n) e (w_n). Como Q é compacto, segue que cada uma destas sequências admitem uma subsequência que converge em Q. Sem perda de generalidade, suponha que as próprias sequências convirjam: $(x_n) \to x \in Q$, $(y_n) \to y \in Q$, $(z_n) \to z \in Q$, $(w_n) \to w \in Q$.

Afirmação 5.2.1. *Os pontos x, y, z e w são os mesmos, isto é,* $\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n = \lim w_n = x$.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer, para este ε, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n_0}} < \varepsilon$.

Em qualquer quadrado, vale que a distância entre dois de seus pontos é menor ou igual a medida de sua diagonal. Em outras palavras, para todo $n > n_0$, vale que

$$p, q \in Q_n \Rightarrow ||p - q|| \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \sqrt{2} < \varepsilon \tag{5.1}$$

Em especial, para todo $n > n_0$, vale que

$$||y_n - x_n|| < \varepsilon \Rightarrow \lim(y_n - x_n) = 0 \Rightarrow \lim y_n = \lim x_n = x \tag{5.2}$$

Logo x é limite da sequência (y_n). De modo análogo verifica-se que $(z_n) \to x$ e $(w_n) \to x$, provando a afirmação.

Afirmação 5.2.2. *x é ponto fixo de f.*

Suponha por absurdo que $f(x) \neq x$, então x é rotulado por 1, 2, 3 ou 4. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $x \notin B(f(x); \varepsilon)$.

Pela continuidade de f, existe um $\delta_1 > 0$ tal que se $p \in B(x; \delta_1)$ então $f(p) \in B(f(x); \varepsilon)$. Tome $\delta < \delta_1$ tal que a δ-vizinhança de x seja disjunta da ε-vizinhança de $f(x)$.

Suponha que $\theta(x) = 0$, então x é rotulado por 1 ou 4, assim como todo ponto na δ-vizinhança de x. Por outro lado, por construção, para esta δ-vizinhança de x, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Q_{n_0} \in B(x; \delta)$, onde 3 vértices de Q_{n_0} tem rótulos distintos, o que é uma contradição pois todos os pontos em $B(x; \delta)$ só podem ser rotulados por 1 ou 4. A Figura 5.16 ilustra a situação.

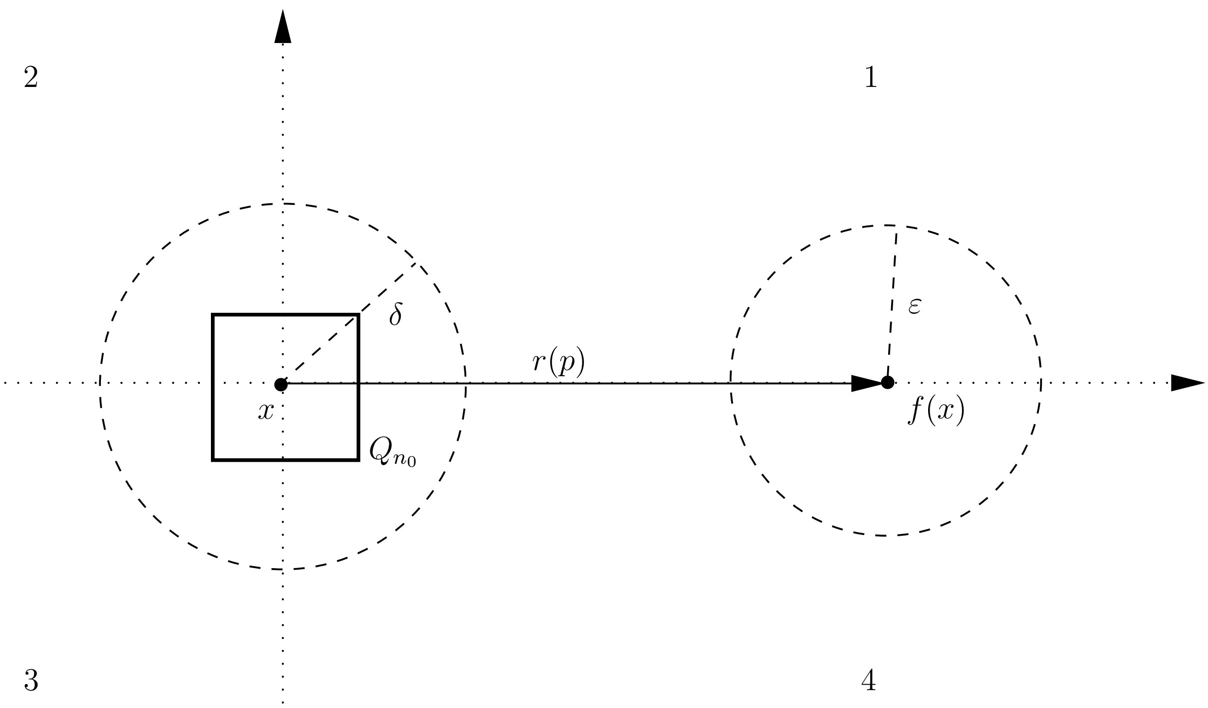

Figura 5.16: Caso $\theta(x) = 0$. Observe que todos os pontos que são levados na ε-vizinhança de $f(x)$ só podem ser rotulados por 1 e 4, contrariando a construção de Q_n.

Para qualquer outro valor de $\theta(x)$, o argumento é análogo e resulta em um absurdo. Sendo assim, a afirmação é válida e x é ponto fixo de f.

□

Apesar da demonstração, a rigor, ser para o quadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$, em nenhum momento da demonstração tal fato foi essencial. Sendo assim, o caso $n = 2$ se aplica para qualquer $[a,b] \times [a,b]$.

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é um resultado topológico. Um resultado topológico é aquele que se mantém através de homeomorfismo. Um conjunto A é homeomorfo a um conjunto B quando existe uma bijeção contínua $\phi : A \to B$ tal que sua inversa ϕ^{-1} é contínua.

Visualmente, a ideia de conjuntos homeomorfos é de que podemos deformar o conjunto A, de modo contínuo, a fim de obter o conjunto B.

Sendo assim, se o Teorema do Ponto Fixo vale no conjunto Q e A é homeomorfo a Q, então sendo $f : A \to A$ contínua, $(\phi^{-1} \circ f \circ \phi) : Q \to Q$ é contínua e admite um ponto fixo x_0, logo:

$$\phi^{-1} \circ f \circ \phi(x_0) = x_0 \Rightarrow \phi \circ \phi^{-1} \circ f \circ \phi(x_0) = \phi(x_0) \Rightarrow f \circ \phi(x_0) = \phi(x_0) \tag{5.3}$$

Isto é, $\phi(x_0)$ é ponto fixo de f. Logo o Teorema do Ponto Fixo de Browuer vale em A homeomorfo a Q. Em outras palavras, se o Teorema de Brouwer vale em um conjunto Q, então ele é verdadeiro em qualquer conjunto homeomorfo à Q.

5.3 Ilustrações e Aplicação do Teorema de Brouwer

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer possui diversas ilustrações lúdicas.

Para o caso bi-dimensional ($n = 2$), tome duas folhas de papel idênticas, amasse uma e a coloque em qualquer posição acima do outro papel. O teorema garante que há pelo menos um ponto posicionado exatamente acima de seu correspondente ponto.

Para o caso tridimensional, considere uma xícara de café. Mesmo após misturar o conteúdo da xícara, em qualquer instante, há um ponto da xícara onde o café encontra-se na mesma posição que estava antes da mistura.

Em ambas as ilustrações, a única suposição é que o movimento físico descrito nos mesmos é representado por uma aplicação contínua.

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, pode ser aplicado na demonstração de um dos mais clássicos e importantes teoremas do cálculo, o Teorema do Valor Intermediário. Basta observar que um intervalo fechado $[a, b]$ é uma bola fechada B^1.

Teorema 5.3.1 (Teorema do Valor Intermediário)**.** *Seja f uma função contínua definida em $[a, b]$, tal que $f(a) < f(b)$. Se um número c é tal que $f(a) < c < f(b)$, então existe um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) = c$.*

Demonstração. Defina $F(x)$ como:

$$F(x) = \lambda(f(x) - c) + x \tag{5.4}$$

Deste modo, resolver $f(x) = c$ equivale a provar a existência do ponto fixo de F, segundo as condições do teorema de Brouwer. Para tal, basta definir λ de modo que $F(x)$ leve $[a, b]$ em $[a, b]$.

Observe que $F(a) = \lambda(f(a) - c) + a$, logo, para que $F(a) \in [a, b]$ é necessário que

$$b - a \geqslant \lambda(f(a) - c) \geqslant 0 \tag{5.5}$$

Observe que $f(a) - c < 0$, logo, para a Equação 5.5 seja satisfeita, λ é um número negativo.

Para $F(b) = \lambda(f(b) - c) + b$, analogamente $\lambda < 0$ satisfaz a relação

$$a - b \leqslant \lambda(f(b) - c) \leqslant 0 \tag{5.6}$$

Isolando λ na Equação 5.5 e Equação 5.6:

$$\frac{b - a}{f(a) - c} \leqslant \lambda \leqslant 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{a - b}{f(b) - c} \leqslant \lambda \leqslant 0 \tag{5.7}$$

Ou seja, basta tomar λ tal que as duas relações da que satisfaça as duas relações da Equação 5.7 ao mesmo tempo. Logo, tomando:

$$\lambda = \max\left\{\frac{b - a}{f(a) - c}, \frac{a - b}{f(b) - c}\right\} \tag{5.8}$$

A $F(x)$ levará $[a,b]$ em $[a,b]$, e pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, F admite pelo menos um ponto fixo em $[a,b]$, ou seja, existe um ponto x_0 tal que $f(x_0) = c$.

$\square$

Por fim, o oposto também é válido, isto é, supondo o Teorema do Valor Intermediário, é possível provar o Teorema de Brouwer para $n = 1$. Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ contínua, e suponha válido o TVI. Seja $g(x) = f(x) - x$, temos que $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, pois $a \leqslant f(a) \leqslant b$, e do mesmo modo, $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Logo, pelo TVI, existe um $x_0 \in [a,b]$ tal que $g(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0) = x_0$.

Desse modo, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para $n = 1$ e o Teorema do Valor Intermediário são resultados equivalentes.

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon L., *Espaços Métricos*. Quinta Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. 337 p. (Projeto Euclides)

[2] Park, Sehie. Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem. *Vietnam Journal of Mathematics*, 27:3. Springer-Verlag, p. 187-222, 1999.

[3] Park, Sehie. Jeong, Kwang S. *A Proof of the Sperner Lemma from the Brouwer Fixed Point Theorem*. Seoul, Korea: 2014.

[4] Shashkin, Yu. A., *Fixed Points*. Mathmatical World Volume 2. Tradução de Viktor Minachin. United States of America: American Mathmatical Society, 1991.

[5] Lima, Elon L., *Análise Real. Volume 1*. Décima Segunda Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 198 p. (Coleção Matemática Universitária)

[6] Lima, Elon L., *Análise Real. Volume 2*. Sexta Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. 202 p. (Coleção Matemática Universitária)

[7] Lima, Elon L., *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$. Segunda Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. 128 p. (Coleção Matemática Universitária)

[8] Figueiredo, Djairo G., *Análise I*. Segunda Edição. Campinas: LTC, 1996. 251 p.

[9] Apostol, Tom M,. *Calculus Volume 2*. 2nd Edition. John Wiley & Sons. 752 p.

[10] Bartle, Robert G. Sherbert, Donald R., *Introduction To Real Analysis*. Fourth Edition. Illinois: John Wiley & Sons, 1935-II. 417 p.

[11] Sotomayor, J. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA - CNPq.

[12] Kreider, D.L., Kuller, R.G., Ostberg, D.R. *Equações Diferenciais*. Editora da Universidade de Sâo Paulo. Tradução de Elza Gomide. United States of America: Addison-Wesley COmpany, Reading, Mass, 1672. 485 p.

[13] Teorema de Picard-Lindelöf. Em: Wikipédia, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2017. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Teorema_de_Picard-Lindel%C3%B6f&oldid=47608935. Acesso em: 11 Out. 2017.

[14] DiPrima, Richard C. Boyce, William E. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. Nona edição. Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 603p.

[15] Khamsi, M.A. *Introduction to Metric Fixed Point Theory*. In: Almezel, Saleh. Ansari, Qamrul H. Khamsi, Mohamed A. *Topics in Fixed Point Theory*. Switzerland: Springer Internacional Publishing, 2014.

[16] Latif, Abdul. *Banach Contraction Principle and Its Generaliztions*. In: Almezel, Saleh. Ansari, Qamrul H. Khamsi, Mohamed A. *Topics in Fixed Point Theory*. Switzerland: Springer Internacional Publishing, 2014.