UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

THUANE RODRIGUES DOS SANTOS

DIVISÃO DE FRAÇÕES: UTILIZANDO O CONCEITO DE PARTIÇÃO E MATERIAIS CONCRETOS PARA AUXILIAR A COMPREENSÃO DO ALGORITMO "INVERTE E MULTIPLICA"

Rio de Janeiro

2017

THUANE RODRIGUES DOS SANTOS

DIVISÃO DE FRAÇÕES: UTILIZANDO O CONCEITO DE PARTIÇÃO E MATERIAIS CONCRETOS PARA AUXILIAR A COMPREENSÃO DO ALGORITMO "INVERTE E MULTIPLICA"

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UniRio, como requisito para obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Loisi Carla Monteiro Pereira

Mestre em Matemática – UFF

Co-orientador: Luiz Felipe Lins

Mestre em Matemática – UniRio

Rio de Janeiro

2017

52p.

Rodrigues, Thuane

Divisão de frações: utilizando o conceito de partição e materiais concretos para auxiliar a compreensão do algoritmo “inverte e multiplica” / Thuane Rodrigues - 2017

52p.

1. Educação Matemática 2. Ensino de frações 3. Divisão de frações I. Título.

THUANE RODRIGUES DOS SANTOS

DIVISÃO DE FRAÇÕES: UTILIZANDO O CONCEITO DE PARTIÇÃO E MATERIAIS CONCRETOS PARA AUXILIAR A COMPREENSÃO DO ALGORITMO "INVERTE E MULTIPLICA"

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da UniRio, como requisito para obtenção parcial do grau de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 18 de dezembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

____

Loisi Carla Monteiro Pereira

Mestre em Matemática – UFF

____

Luiz Felipe Lins

Mestre em Matemática – UNIRIO

____

Cristiane de Mello

Doutora em Matemática - UFRJ

Dedico este trabalho, bem como todas minhas demais conquistas, a Deus, que me deu vida, forças, entendimento e sustento.
Me amou primeiro sem eu saber e muito menos merecer.

AGRADECIMENTOS

A Deus, primeiramente, por me livrar da morte ainda quando eu não tinha sequer consciência, me amar e me sustentar até aqui, garantindo essa vitória;

Aos meus pais, Aline Rodrigues dos Santos e Sérgio Oliveira dos Santos, por garantirem apoio irrestrito, diante de todas as atividades que nos cercam, permitindo que eu passasse cada fase e chegasse até aqui;

À minha irmã, Gabrielly Rodrigues dos Santos, por sua presença e ajuda nas horas de “treinar” meu trabalho;

À minha avó, Eunice Novaes de Oliveira, por sempre estar pronta a ajudar em diversas situações;

À minha professora orientadora, Loisi Carla Monteiro Pereira, por ter aceitado de cara o desafio de trabalhar com algo novo, por todo incentivo, apoio, quando eu estava achando que não iria conseguir fazer metade do que apresento hoje. Deus lhe abençoe e conserve, você me inspira;

Ao meu professor co-orientador, Luiz Felipe Lins, por ter aceitado colaborar com este meu trabalho com toda sua experiência e resultados. Sou fascinada pelo trabalho que você realiza! Você também me inspira;

Aos meus amigos, por me aguentarem nos momentos em que quase tombei pelo cansaço: vocês fazem muita diferença no caminho;

Aos meus colegas de trabalho, por terem segurado as pontas no serviço para que eu escrevesse mais um pouquinho;

Aos meus chefes, pela compreensão e colaboração durante cada etapa deste curso;

À minha igreja, na figura do meu pastor presidente Niger Martins, pelo apoio espiritual e incansáveis orações: vocês são benção de Deus na minha vida;

Meu muito obrigada!

“Ainda que eu promova a maior das caridades e a maior benfeitoria a humanidade, se eu não tiver amor, nada valerá a pena.”
1 Coríntios 13:1-13

RESUMO

Este trabalho traz em seu conteúdo um estudo aplicativo inspirado na tese de doutorado da professora Aline Simas (UERJ) "ATIVIDADES MULTIMODAIS EM UMA ABORDAGEM PARTITIVA PARA FRAÇÕES", sobre a ideia da divisão por partição na divisão de frações, buscando assim diminuir o distanciamento entre a divisão de números naturais e a divisão de números fracionários e também dar importância ao aprendizado do aluno, mostrando-lhe o processo de um algoritmo em vez de apenas lhe dar o algoritmo para ser utilizado e encontrar uma resposta. Para tanto, abordamos neste trabalho a importância dos materiais concretos e do conhecimento do conteúdo específico, desde a parte histórica das frações, tratando dos diversos significados das frações, ressaltando a importância da utilização do material concreto para o ensino de Matemática, refletindo sobre a abordagem dos livros didáticos sobre a divisão de frações até a apresentação de relatos reais da aplicação da atividade proposta "Preparando cachorro-quente".

Palavras chave: divisão, divisão de frações, material concreto, ensino, ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work brings in its content an application study inspired by the doctoral thesis of Professor Aline Simas (UERJ) "ATIVIDADES MULTIMODAIS EM UMA ABORDAGEM PARTITIVA PARA FRAÇÕES", on the idea of the division by partition in the division of fractions, in order to reduce the distance between the division of natural numbers and the division of fractional numbers, and also care about the student learning by showing him the process of an algorithm instead of just giving him the algorithm to be used and finding an answer. To do so, we focus on the importance of concrete materials and knowledge of the specific content, since the historical part of the fractions, dealing with the different meanings of fractions, emphasizing the importance of the use of concrete material for mathematics teaching, reflecting on the approach of the didactic books about the division of fractions, until the presentation of real reports of the application of the proposed activity "Making hot dogs".

Keywords: division, fractions division, concrete material, teaching, mathmatician teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitas vezes, no Ensino Básico, as fórmulas para efetuar as operações com frações são apresentadas sem qualquer justificativa, são dadas automaticamente e isso não permite que os alunos tenham a oportunidade de vivenciar experiências com os significados dessas operações. Porém, em lugar de dar automaticamente essas fórmulas, como construí-las com a ajuda de um material concreto, de forma que os alunos possam atribuir significado a elas?

Esta monografia consiste em trabalhar com a ideia de partição na divisão de frações, utilizando um material concreto elaborado pela professora Aline Simas da Silva (UERJ), de modo a auxiliar a compreensão e construção do algoritmo “inverte e multiplica” da divisão de frações. O material utilizado na atividade "Preparando Cachorro-quente", promove a visualização da ideia de partilha na divisão de frações ao trabalhar com distribuição de partes de salsicha para partes de pães. Acreditamos que o processo lúdico e interativo proporciona um ambiente mais receptivo por parte dos alunos e torna mais palpável o conceito abstrato.

Quando aprendemos sobre, trabalhamos com ou pensamos em divisão de números naturais logo somos remetidos a ideia de partilha, de distribuição: tenho 10 balas para dividir entre 5 pessoas, quantas balas cada pessoa receberá? Outra ideia trabalhada na divisão de naturais é a ideia de quotição, de “quantos cabem em”: tenho dez balas e farei saquinhos de 2 balas, quantas pessoas ganharão saquinhos de balas? No entanto, quando falamos dos números fracionários, apenas a quotição, a ideia de medida é trabalhada e a ideia de partilha não, causando um distanciamento entre a divisão de naturais e de fracionários, isto porquê a ideia de quotição é mais clara e perceptível na divisão de frações.

Diante disso, este trabalho apresenta o material concreto para o ensino de divisão de frações sob a ideia de partição e sua aplicação, discorrendo sobre frações, materiais concretos, e trazendo em anexo um jogo para instrução de principalmente frações equivalentes e em sua sequência didática abordar também comparação de frações.

1. MATERIAIS CONCRETOS

Refletindo sobre a frase “As pessoas criam aversão à matemática desde cedo e há uma aceitação em relação a isso” do matemático Artur Ávila que, em 2014, recebeu a Medalha Fields, prêmio de maior honraria concedida a um matemático, equivalente ao prêmio Nobel, percebe-se que é deveras preocupante para nós estudantes, profissionais e pesquisadores da área de ensino da matemática, tanto pela sua primeira sentença e mais ainda pela segunda. Parece que, de modo geral, entende-se que para ser matemática tem que ser difícil e complicado e, assim, cria-se a barreira do “eu não consigo aprender” ou “é impossível aprender”. Além disso, outros atribuem a dificuldade de aprendizado à falta de conexão entre o mundo da matemática e o mundo real. Frases como “eu não vou usar isso para nada na vida” são ditas repetidas vezes em salas de aula por alunos do ensino básico e você consegue escutá-la por alunos em cursos superiores que aparentemente não necessitariam de matemática em seu currículo. Ensinar a matemática, então, se torna desafiador, onde o professor tem que ultrapassar todas essas barreiras e apresentar a matemática como algo de utilidade diária, mas também científica e específica, e como algo abstrato e, ao mesmo tempo, concreto, palpável. Diante disso, recursos didáticos são produzidos e inseridos nas aulas convencionais, como, por exemplo, o uso de materiais concretos para ensino e reforço de aprendizado, a saber, jogos, tangram, material dourado, aplicativos, entre outros.

A utilização dos materiais ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico, trabalha a investigação dos experimentos e auxilia na relação entre o abstrato e o concreto, permitindo ao aluno fazer “traduções” das situações reais para a matemática e vice-versa, o que é chamado de Letramento Matemático, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular - BNCC.

O material concreto é mais uma ferramenta aplicada e utilizada com o objetivo de levar o aluno a entender a matemática como algo útil não apenas para contagens e conclusão de períodos escolares, mas como algo motivador, esclarecedor e necessário para a vida, desenvolvendo raciocínio rápido e lógico que auxiliará nas resoluções de problemas do cotidiano, não só matemáticos, mas sociais, desenvolvendo senso crítico e humano, concordando com uma das competências específicas de matemática para o ensino fundamental da BNCC:

> Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. (BNCC, 2016)

A discussão sobre o uso de material concreto para o auxílio ao ensino de matemática é algo consideravelmente novo, sendo isto destacado por Pestalozzi pela primeira vez no século XIX, que defendia o uso dos materiais manipuláveis como subsídio para o ensino, desde que a educação se baseasse na percepção de objetos concretos, com a realização de experimentações e observações. No início dos anos 90, a discussão girava em torno do mito de que o material concreto ou manipulativo garantiria o aprendizado por parte do aluno, o que não é verdade, de acordo com NACARATO. A forma como o material é utilizado é essencial para o processo de ensino-aprendizado. Sem a devida reflexão por parte do professor do conteúdo a ser trabalhado, o uso inadequado do material manipulável pode resultar negativamente no aprendizado. Em suma, são apontadas duas características que podem contribuir para o resultado negativo no uso dos materiais concretos e manipulativos que são: 1) a distância entre o material e as relações matemáticas a serem representadas e; 2) o material se torna um símbolo arbitrário em vez de uma concretização natural. Por vezes, professores utilizam o material concreto para introduzir uma noção matemática e, quando se chega nela, o material já é deixado de lado e passa-se a trabalhar no nível abstrato, conceitual, enquanto que o conceito poderia ser mais desenvolvido com o auxílio do material. Podemos destacar este fato com algo vivenciado por mim há aproximadamente 11 anos: nesta época era comum darem ábacos como lembranças, presentes, em festinhas juninas escolares e eu me lembro de ganhá-los e não ter a mínima ideia do que ele fazia ou me auxiliava; eu ficava movendo os discos pra lá e pra cá e achava uma brincadeira chata, até ele ficar de lado. Sendo assim, o ábaco, que é um instrumento para cálculos milenar, por si só não ensinava e não auxilia a instrução. Podemos, então, observar que a devida valorização do material, dos seus benefícios no ensino e preocupação com a sua aplicação e interação com o assunto abordado faz toda a diferença no objetivo desejado através do material. NACARATO (2005) vai dizer que:

> Nenhum material didático – manipulável ou de outra natureza – constitui a salvação para a melhoria do ensino de Matemática. Sua eficácia ou não dependerá da forma como o mesmo for utilizado. “Não é o uso específico do material concreto, mas, sim, o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático” (SCHLIEMANN; SANTOS; COSTA, 1992, p. 101). (Nacarato, 2005)

O uso do material concreto em sala de aula tem por objetivo, além, claro, do objetivo principal que é o ensino da matemática, trazer os alunos para algo mais perto da sua realidade atual. Assim como tudo está em movimento e eterna evolução, o ensino não pode ficar estático e não acompanhar. A tecnologia avança, e o ensino precisa acompanhá-la, afinal, o principal motivo do ensino, o aluno, está acompanhando o desenvolvimento ao seu redor. É difícil entender que eu preciso saber calcular enquanto que eu tenho uma máquina que faz os cálculos para mim. Num caso como este, é necessário mostrar a importância de se saber o que foi necessário aprender para criar este instrumento que faz os devidos cálculos.

A utilização de materiais concretos no ensino de matemática é uma proposta didática que traz o prazer de algo diferente e lúdico em sala de aula, que torna o difícil, o abstrato em algo compreensível e palpável, mais perto da realidade. Seja este material um jogo, um filme, uma atividade como a que será relatada mais a frente neste trabalho, uma folha e suas dobraduras, a utilização de um aplicativo, a resolução de um problema, todos eles são, se utilizados para o ensino de um conteúdo disciplinar, no nosso caso matemático, materiais didáticos concretos.

Em uma pesquisa feita a pouco mais de 130 alunos e ex-alunos, constatou-se que pouco mais da metade, 50,4%, gostava de matemática pelos mais variados motivos, entre eles "*É fundamental para o nosso dia a dia e além do mais, ela envolve muitas outras matérias*" e "*Sim. Faz parte de nosso cotidiano, ainda que não a vejamos de forma explícita*." enquanto que 27,0% não gostavam e, dentre os motivos para não gostar, chamaram atenção os motivos "*a matemática é muito desnecessária*", "*gostava muito de matemática antes da faculdade*" e "*Não. Penso que se tivesse melhores professores, eu talvez pudesse gostar mais.*". As respostas podem parecer subjetivas, porém elas carregam experiências reais. O aluno ou ex-aluno que diz que a matemática é muito desnecessária não conseguiu ver que contar os dias, as horas e até a data do seu aniversário envolve matemática ou não foi levado a conseguir ver isso. Algo muito comum como um calendário, um relógio ou dinheiro, objetos concretos, fariam esse aluno ver a matemática na vida real, por exemplo, se devidamente orientado.

Quanto ao nível de dificuldade que a matemática tinha para cada participante da pesquisa, podemos ver no gráfico 1 abaixo (fig. 1) que 43,5% das pessoas considera difícil, sem contar outros 14,5% que consideram muito difícil. 3 pessoas responderam que matemática é impossível enquanto outras 40 pessoas, 29,0% consideram matemática fácil. 5 pessoas consideraram matemática muito fácil e 10 pessoas afirmaram ser indiferente.

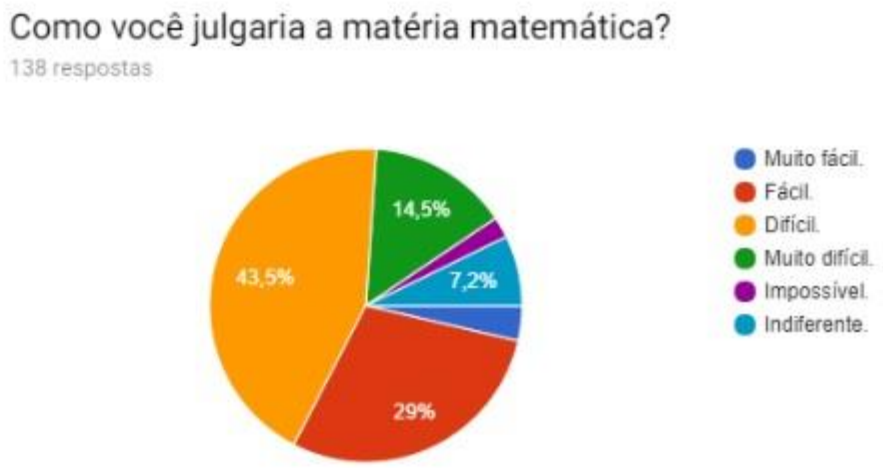


Figura 1 - gráfico 1

Outro fato que se pode inferir da pesquisa foi a respeito do uso do material concreto para aprender matemática, onde o resultado foi de 50,71% para sim e 49,3% para não, quase empate, conforme o gráfico 2 (figura 2).

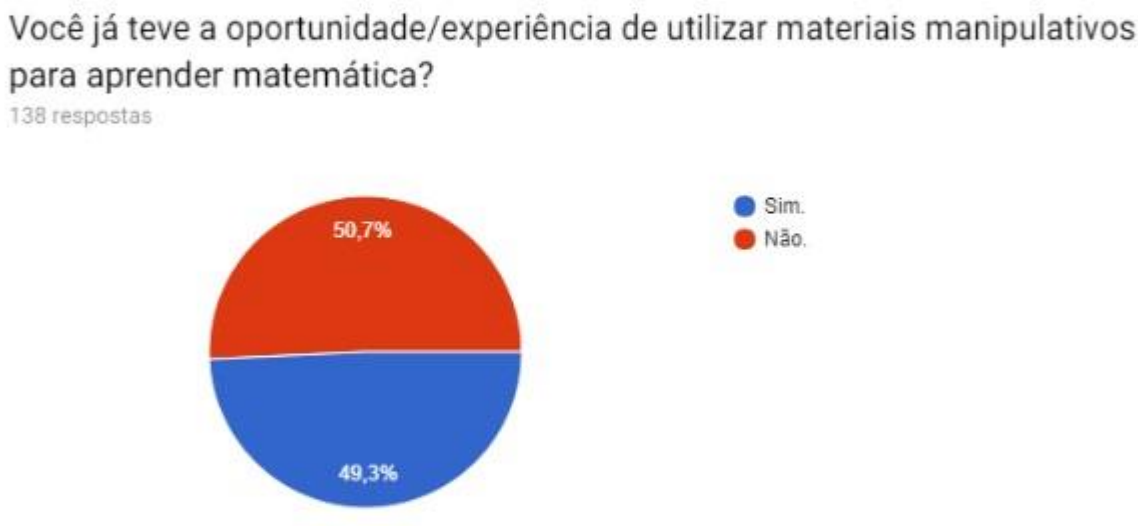


Figura 2 - gráfico 2

As pessoas que tiveram experiência com o material, resumindo, disseram que o material foi um facilitador da compreensão da matéria, tornou a aula dinâmica, "saindo da mesmice", e na pergunta "Você acha que todas as aulas de matemática deveriam/poderiam ser com materiais concretos/manipulativos? Por quê?", quem já teve experiência com material concreto, respondeu em sua maioria que grande parte das matérias poderia sim ser com a utilização do material, pois isso torna a aula dinâmica, prende atenção dos alunos e esclarece melhor a matéria, no entanto, algumas respostas tivemos foi que "*nem todas as matérias de matemática da pra ensinar com material concreto, por exemplo função. Eu não vejo nenhuma aplicação com materiais.*". A criatividade e o profundo conhecimento sobre a matéria a ser estudada são fundamentais para o desenvolvimento de um material concreto para o ensino desta, sendo o material para construção do conhecimento ou reforço do conhecimento.

Para a pergunta "Você achou as aulas/atividades com materiais manipulativos mais legais que as aulas tradicionais?", para os que tiveram a experiência do material, em sua maioria responderam que estas foram mais legais que as aulas convencionais. O "legal" aqui descrito traz o entendimento de algo que não foi penoso, ao contrário, foi algo prazeroso. Isso se confirma numa das respostas dada a mesma pergunta por alguém que não teve a experiência com materiais: "*Não tive esta oportunidade. É por isso que muitos odeiam matemática.*". É extremo utilizar-se desta afirmação para dizer que a não utilização de materiais concretos no ensino de matemática faz com que muitos alunos odeiem matemática, porém, quando temos experiências prazerosas, como uma dinâmica, ou um jogo, ou alguma atividade, isso nos remeterá ao seu objetivo e será lembrado com satisfação, imputando ao que se destina, no nosso estudo o ensino da matemática, algo bom e não algo ruim.

Discorrendo sobre a questão do lúdico e prazeroso, os jogos, que provocam interesse e integração, como materiais para o ensino de matemática, são fundamentais no que diz sobre interesse, prazer, integração, algo de grande relevância para o desenvolvimento social e moral, desenvolvimento de raciocínio lógico, diante de desafios apresentados que devem ser solucionados, e participação, desde que bem fundamentados na teoria proposta e utilizando-se de uma metodologia bem definida, para que o jogo não se torne apenas brincar por brincar e cumpra o seu objetivo. Estes jogos podem ser criados ou adaptados de jogos já existentes. O jogo como instrumento de ensino traz o aluno para a construção do seu próprio aprendizado, tornando ele personagem ativo do processo ensino-aprendizado através da construção de raciocínio e critérios para "vencer" o jogo, o desafio proposto. O texto de Aparecida Francisco da Silva e Helia Matiko Yano Kodama (2005) vai dizer exatamente isso:

> Num contexto de jogo, a participação ativa do sujeito sobre o seu saber é valorizado por pelo menos dois motivos. Um deles deve-se ao fato de oferecer uma oportunidade para os estudantes estabelecerem uma relação positiva com a aquisição de conhecimento, pois conhecer passa a ser percebido como real possibilidade. Alunos com dificuldades de aprendizagem vão gradativamente modificando a imagem negativa (seja porque é assustadora, aborrecida ou frustrante) do ato de conhecer, tendo uma experiência em que aprender é uma atividade interessante e desafiadora. Por meio de atividades com jogos, os alunos vão adquirindo autoconfiança, são incentivados a questionar e corrigir suas ações, analisar e comparar pontos de vista, organizar e cuidar dos materiais utilizados. Outro motivo que justifica valorizar a participação do sujeito na construção do seu próprio saber é a possibilidade de desenvolver seu raciocínio. Os jogos são instrumentos para exercitar e estimular um agir-pensar com lógica e critério, condições para jogar bem e ter um bom desempenho escolar.

O uso dos materiais concretos visa o auxílio na construção ou reforço do conhecimento, trazendo o lúdico, o prazeroso, a fim de que bloqueios sejam derrubados e a noção de dificuldade e impossibilidade seja deixada de lado.

2. HISTÓRIA DAS FRAÇÕES

Das histórias de Heródoto, sabemos que cerca de 3000 a.C no Egito, a fim de recolher impostos anuais, o Faraó Sesótris mandou seus medidores dividir e partilhar entre agricultores as terras às margens do rio Nilo, que eram extremamente férteis. Mas, com o período de chuvas e a cheia do rio, tais demarcações eram desfeitas, havendo a necessidade de remarcar as áreas. Então, os medidores, ou "estiradores de corda", pois usavam cordas com nós para marcar as terras como uma espécie de trena, faziam novamente a medição e como unidade de medida era utilizado o côvado ou cúbito, conhecido como a unidade de faraó, pois um cúbito é equivalente a distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó. A distância entre dois nós consecutivos da corda media um cúbito, o que seria hoje aproximadamente 45 cm. No entanto, dependo dos lados dos terrenos nem sempre as medidas davam um número inteiro de vezes, com isso surgiu a necessidade de se criar um novo tipo de unidade de medida diferente do nó ou então um novo número.

Isso acontece, pois, para medir, comparamos uma grandeza a uma unidade de mesma espécie estabelecida como referência. No caso dos egípcios a medida de referência é o cúbito, representada na corda pelos nós. Por exemplo, suponha que a corda tenha medida AB e cada nó tenha medida u, conforme a figura 3. Podemos observar que cabem 7 nós na corda AB. Temos, então, um número inteiro de nós na corda.

Figura 3 – corda representada pelo seguimento AB dividida em sete nós.

Uma vez fixada uma unidade *u*, é claro que nem todos os demais segmentos serão seus múltiplos inteiros. Uma estratégia para lidar com situações como esta, é subdividir *u* em partes menores obtendo uma nova unidade *u'* (ou uma subunidade de *u*) que caiba um número inteiro de vezes em AB.

Tomando um retângulo qualquer como um dos terrenos dos egípcios e medindo seus lados com a corda AB, na figura 4 vamos ver que o terreno não tem um número de nós inteiro, sendo que no lado maior temos a corda AB mais uma parte *r* de *u*, isto é, sete nós mais uma parte *r* de *u*, e no lado menor temos um nó mais uma parte *t* de *u*. Essas partes r e t são a "medida diferente" da medida que os egípcios usavam, o nó, mas o que deu origem a necessidade de um novo número, o número fracionário.

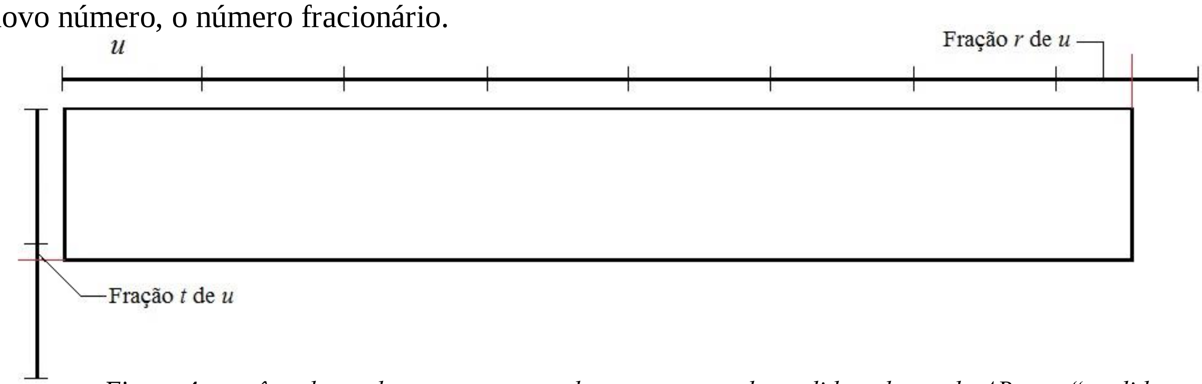


Figura 4 – retângulo qualquer representando o terreno sendo medido pela corda AB e as "medidas novas" ou diferentes dos nós.

Por exemplo, tomando a atividade do artigo do Professor Dr. Victor Giraldo (p. 4) - *O Desenvolvimento do Conceito de Número na Escola Básica* - para um minicurso, "*Como você explicaria a seus alunos no ensino fundamental um procedimento para medir um segmento, no qual a unidade não cabe um número inteiro de vezes?"*. Ao observarmos a figura 5, poderemos observar que o segmento AB é medido por um número inteiro de *u*, *3u*, e que o seguimento CD é medido por um número não inteiro de *u*: em CD temos *2u* mais um pedaço congruente a metade de *u*.

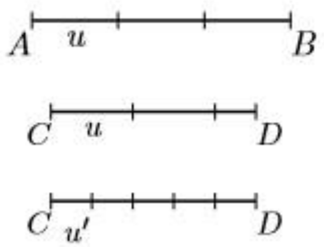


Figura 5 – seguimentos AB e CD divididos por u e u'.

Em AB, temos que, em relação a unidade *u*, sua medida é 3. Já em CD não temos um número inteiro para sua medida, pois *u* não cabe um número inteiro de vezes em CD. Assim sendo, como o pedaço que sobra em CD é congruente a metade de *u*, podemos então subdividir *u* em duas partes iguais e obter uma nova subunidade *u'* tal que $u = 2u'$, ou seja, $u' = \frac{1}{2}u$. Desta forma, *u'* cabe 6 vezes em AB e 5 vezes em CD e suas medidas em relação a *u'* serão respectivamente 6 e 5. Desta forma, pode-se dizer que CD = $5u' = 5.\frac{1}{2}u = \frac{5}{2}u$, e a medida de CD em relação a *u* é $\frac{5}{2}$.

> Esta é uma maneira de definir medidas não inteiras, isto é, de estender a definição de medida para o caso em que a unidade não cabe um número inteiro de vezes no segmento a ser medido. Estas medidas são associadas aos números que chamamos de racionais. Mas será que este procedimento é suficiente para definir a medida de qualquer segmento? GIRALDO, V (2013)

Surgem então, as primeiras noções de números fracionários e a utilização das frações. As primeiras frações egípcias foram criadas a partir das necessidades de medir terras, repartir as colheitas, medir tecidos, líquidos e outros. Os egípcios usavam as frações unitárias, cujo numerador tem sempre o valor unitário 1, sempre como uma relação parte-todo e as outras frações eram representadas como a soma de frações unitárias sem o sinal de adição (+), pois este ainda não havia sido inventado. As frações eram representadas na notação hieroglífica e utilizavam um sinal elíptico seguido do número inteiro correspondente, como podemos ver na figura 6.

Outras frações eram representadas com símbolos especiais, como podemos ver na figura 7, possivelmente pela sua utilidade prática, como $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

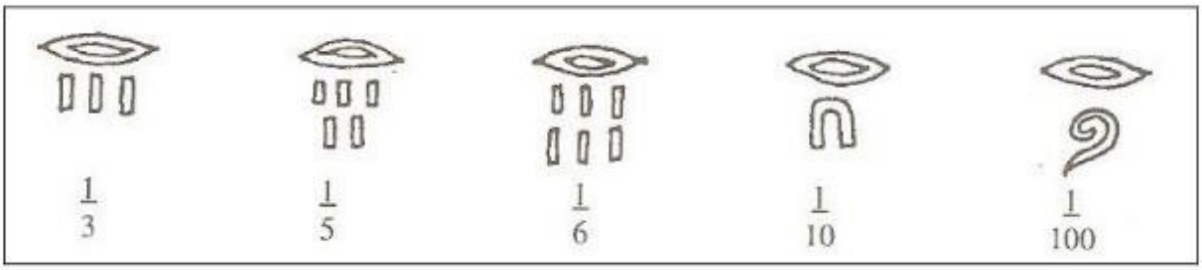


Figura 6 – Representação de números fracionários pelos egípcios.

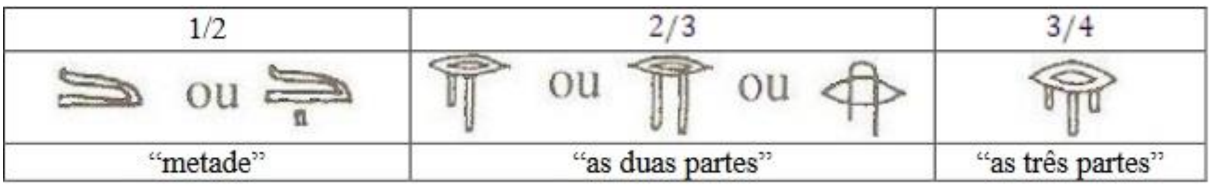


Figura 7 – representações especiais para algumas frações específicas.

Uma fração pode representar a parte de um todo, por exemplo $\frac{3}{5}$ de um bolo; pode representar o resultado de uma partilha, um quociente entre dois números, por exemplo 3 balas para serem divididas para 4 crianças, $\frac{3}{4}$; pode representar uma razão entre o número de meninos e o número de meninas do total de pessoas em uma sala, por exemplo, se esta razão for $\frac{5}{6}$, é equivalente dizer que temos 10 meninos para 12 meninas, se o grupo for de 22 pessoas; pode representar um operador quando queremos saber quanto é $\frac{5}{8}$ de meio milhão de dinheiros; pode representar uma taxa, por exemplo a porcentagem e a taxa de um veículo que percorre distância de 30km em 13 minutos que é igual a 30km/13min. A multiplicidade de significado das frações é relacionada à dificuldade dos alunos com as frações, segundo MONTEIRO e COSTA (2005).

O conceito de unidade é muito importante para o bom entendimento das frações. Para trabalharmos medidas, precisamos comparar valores que determinarão a unidade proposta e nem sempre a unidade estará associada ao número 1. Por exemplo, se pegamos 1 barra de chocolates e a dividimos em 7 partes, pedaços iguais e comemos 3 pedaços, temos então que comemos $\frac{3}{7}$ da barra de chocolate, uma medida, onde o pedaço é a subunidade da contagem da barra, onde esta subunidade não se refere ao número 1. O número 1 se refere a barra inteira, ou seja, aos sete pedaços juntos da barra. Por exemplo, seja a barra de chocolate de medida AB; repartimos em 7 pedaços iguais e cada um deles vale $\frac{1}{7}$.AB que é a subunidade desta barra de chocolate.

3. DIVISÃO E IDEIAS DE DIVISÃO

A divisão é uma operação matemática que nos permite inferir algumas definições sobre ela, por exemplo, a partilha, que é a mais clara e geralmente a primeira em que se pensa quando se fala de divisão, e a quotição, que se refere às medidas, ao famoso conceito de "quantos cabem em". Veremos adiante sobre as frações e a divisão de frações e como o conceito de partição quase nunca é associado à divisão de frações.

A divisão por partição, ou partilha, é a divisão na qual é dado um todo e a quantidade de partes em que o mesmo deve ser distribuído, sendo o resultado o valor de cada parte. Pode ser relacionada à ideia de repartir (tese Aline). Um exemplo bem simples de partição pode ser visto neste pequeno problema: "Júlia ganhou 12 chocolates e quer dividir entre 4 amigos de sua sala de aula. Quantos chocolates cada um vai receber?"

A divisão por quotas, ou quotização, é a divisão na qual é dado um todo e o valor de cada parte que forma o todo, sendo o resultado a quantidade de partes que cabem no todo. Está relacionada à ideia de medir (tese Aline). "Julia tem 12 chocolates e quer guardar 3 chocolates em cada pote. Quantos potes Julia precisa?"

Na divisão por partição vale ressaltar que, dado um problema de divisão por partição, que pode ser relacionado a uma distribuição, o dividendo é o todo que se quer dividir, o divisor é a quantidade de partes em que o dividendo, ou o todo, será dividido e o quociente é quanto cada parte, ou cada divisor, irá receber, é o tamanho ou a quantidade de elementos de cada parte. Por exemplo, Renata tem 25 bolos de potes e sua turma tem 5 alunos. Quantos bolos de pote cada aluno pode receber se Renata dividir os bolos igualmente entre eles? Neste exemplo, o dividendo é o número de bolos de pote, 25, o divisor é o número de alunos que Renata vai dividir os bolos, ou seja, o número de partes em que Renata dividirá os bolos, 5, e o quociente é exatamente a quantidade de bolos que cada aluno receberá, ou seja, é a quantidade que cada parte do divisor, cada aluno, irá receber, que neste exemplo também é 5.

Na divisão por quotição, relacionado a ideia de medir, quantos cabem em, vale ressaltar que, dado um valor ou quantidade inicial, o todo, que é o dividendo, deve ser dividido em quotas preestabelecidas, isto é, o tamanho que cada quota terá ou a quantidade de elementos que cada quota terá, que é o divisor, e o quociente é o número de quotas que cabem no dividendo, no todo. Por exemplo, eu tenho 150 sapatos e os armazenarei de 5 em 5. Quantas caixas vou precisar para armazena-los? Neste exemplo, 150 é o dividendo, o todo, 5 é o divisor ou a quota ou a quantidade de elementos que cada caixa terá e o quociente é o número de caixas que precisarei, ou seja, é o número de vezes que a quota 5 cabe no todo 150, totalizando 30.

4. ABORDAGEM NOS LIVROS DIDÁTICOS SOBRE FRAÇÕES E DIVISÃO DE FRAÇÕES

Para fazermos essa análise da abordagem de frações nos livros didáticos observamos livros aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2017. Vamos dar mais ênfase ao assunto divisão de frações, apenas trazendo a conhecimento a sequência dos assuntos de frações de cada livro.

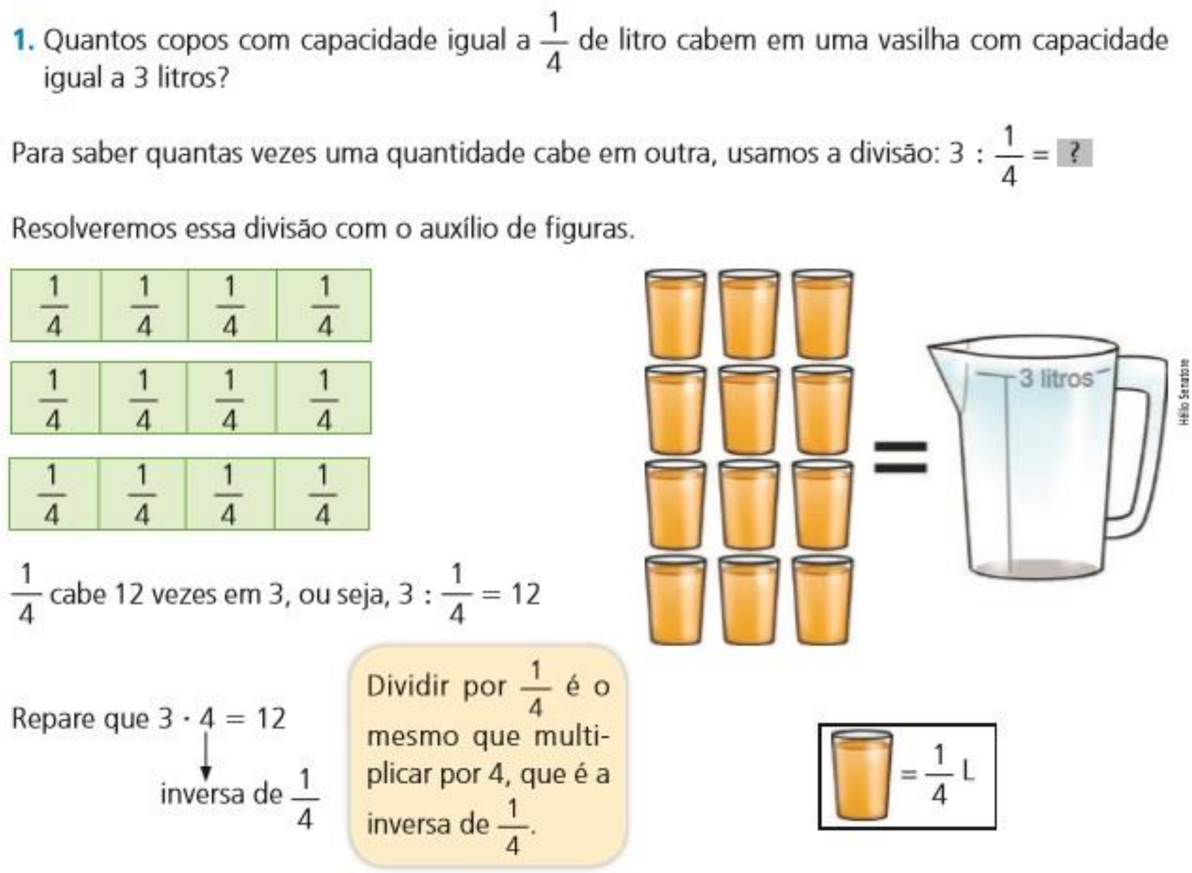
Dos livros aprovados para matemática, escolhemos as obras:

- Para sexto ano: Matemática Bianchini da editora Moderna e Livro praticando matemática da editora do Brasil.
- Para sétimo ano: Matemática Bianchini da editora Moderna e Livro Praticando Matemática da editora do Brasil.

A introdução no assunto frações em ambos os livros se dá após já ter trabalhado os números naturais e suas operações e divisibilidade. No livro Praticando Matemática do sexto ano eles introduzem frações no capitulo 11 e apresentam a fração como parte do inteiro, seguido da fração como um operador, trazendo um problema onde é necessário calcular $\frac{1}{3}$ de 24 figurinhas, números mistos, frações equivalentes, simplificação de frações, comparação de frações e então as operações.

Começando com a adição e subtração de frações, primeiro com frações de mesmo denominador e então denominadores diferentes, onde o autor sugere achar frações equivalentes e de mesmo denominador para então efetuar a operação, sem citar explicitamente o uso do mmc; faz dois exemplos e segue para os exercícios. Continuando as operações com números fracionários, vem a multiplicação sempre com alguns exercícios resolvidos para introduzir o assunto. Utilizam também de exemplos com figuras.

Antes de apresentar a divisão de frações, após a multiplicação ele apresenta a fração inversa e dentro do tópico fração inversa ele apresenta a divisão de fração, primeiro apresentando um problema que a solução é a divisão de um número natural por uma fração. Este problema explicitamente traz a ideia de "quantos cabe em", que é a ideia de divisão por quotição, conforme a figura 8. Podemos ver também na figura que ele ressalta que o produto de 3 por 4 é 12 e que 4 é o inverso de $\frac{1}{4}$. O autor fará isso em mais dois exemplos além de sempre usar a ideia de divisão por quotição com a ideia de quantos cabem em e, na figura 8 ainda, podemos ver que ele já conclui que a divisão por $\frac{1}{4}$ é a mesma coisa que multiplicar por 4. Após os outros dois exemplos ele concluirá que "para efetuar divisões envolvendo frações, multiplicamos o dividendo pela inversa do divisor", já apresentando o algoritmo da divisão de fração sem dar maiores explicações.



1. Quantos copos com capacidade igual a $\frac{1}{4}$ de litro cabem em uma vasilha com capacidade igual a 3 litros?

Para saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra, usamos a divisão: $3 : \frac{1}{4} = \boxed{?}$

Resolveremos essa divisão com o auxílio de figuras.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$ cabe 12 vezes em 3, ou seja, $3 : \frac{1}{4} = 12$

Repare que $3 \cdot \underbrace{4}_{\text{inversa de } \frac{1}{4}} = 12$

Dividir por $\frac{1}{4}$ é o mesmo que multiplicar por 4, que é a inversa de $\frac{1}{4}$.

Figura 8 – exercício de introdução de divisão de frações do livro Praticando Matemática 6º ano.

No livro do 7º ano da mesma coleção, eles retomam o assunto de divisão de frações apresentando a fração como um quociente de dois números. Em seguida introduz números decimais e essa é a abordagem desta coleção.

No livro Matemática Bianchini 6º ano o tema números racionais na forma de fração é apresentado com uma série de pequenos recortes de reportagens que mostram diversas formas numéricas, mostrando os números com que convivemos. Após essa pequena introdução, apresenta as frações no modelo parte do inteiro usando um exemplo de medição de uma quadra, onde a medida utilizada é o passo e a comparação é feita com a medida pés, onde 1 passo = 3 pés, ou seja, 1 pé = $\frac{1}{3}$ de 1 passo e conclui no exemplo que a medida procurada então é de 63 passos mais $\frac{2}{3}$ de passo. Assim então define o que é um número racional, as partes de uma fração - quem é o numerador e o denominador, como se lê as frações e mostra mais alguns exemplos de fração como parte de um todo.

Diferente do outro livro analisado, segue agora para números fracionários com denominador igual a 100 e apresenta os números na forma percentual. Em seguida apresenta a fração como quociente de dois números e como resultado da divisão de dois números e dentro desta abordagem apresenta os números mistos. Como no outro livro de 6º ano, segue apresentando os significados das frações e apresenta a fração como razão, seguido da equivalência, da simplificação e da comparação de frações para, então, seguir com as operações. Dentro de fração como razão, o autor utiliza um exemplo que a resolução apresentada me parece confusa para o aluno ou então incompleta. O exercício diz “O comprimento da estrada da Fazenda é $\frac{3}{8}$ do comprimento da estrada do Mar. Se a estrada da fazenda tivesse 72 quilômetros, qual seria o comprimento da estrada do Mar?” (Matemática Bianchini 6º ano), e o livro apresenta o esquema da figura 9 como auxílio para resolução do problema, mas não ressaltou o porquê da estrada do Mar ter sido dividida em oito partes e isso não me parece explicito e poderia deixar o aluno sem entender o que foi feito apenas utilizando o livro; é indispensável uma atenção e intervenção do professor na resolução deste exercício.

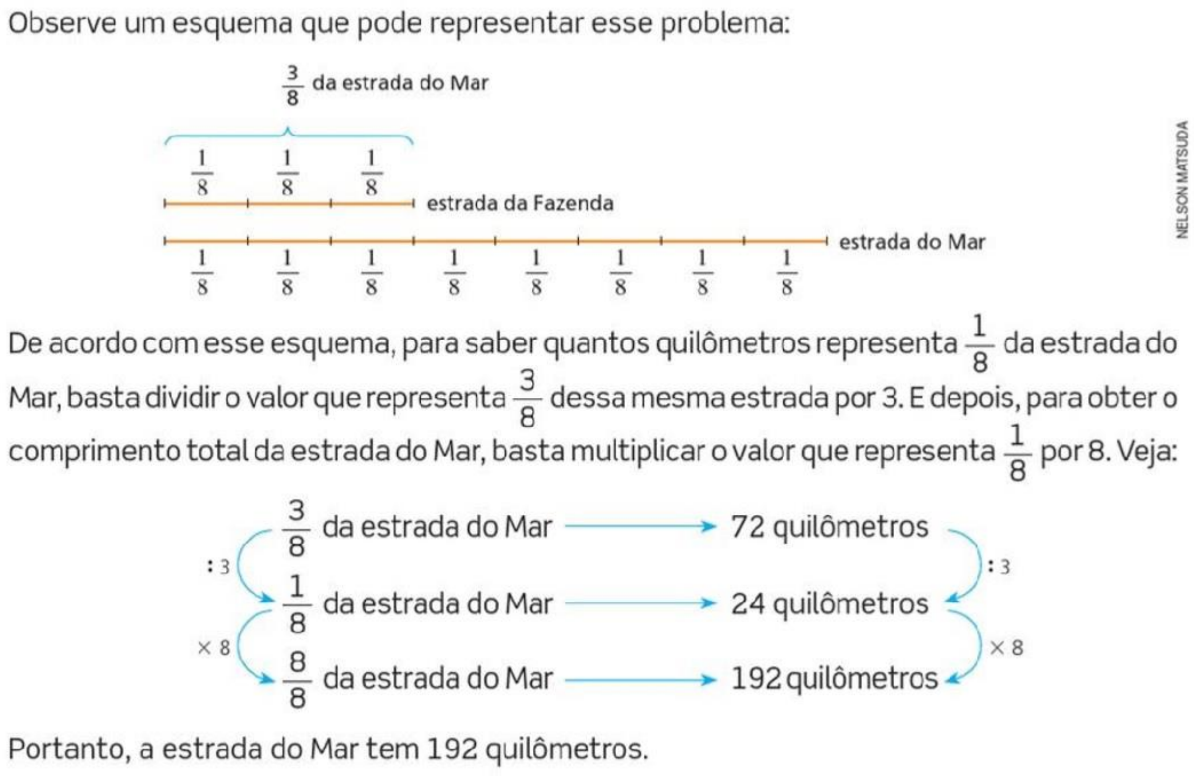


Figura 9 – resolução do exemplo apresentado no tópico de frações como razão do livro Matemática Bianchini 6º ano.

Nas operações com frações, da mesma forma do outro livro mencionado, o autor começa com adição e subtração de números fracionários de mesmo denominador. Nas operações com denominadores diferentes, o autor apresenta dois exemplos para concluir que, para resolver essa operação, basta encontrar frações equivalentes de mesmo denominador, substitui-las e efetuar a operação. O autor segue com a multiplicação de frações por números naturais e por números fracionários. Da mesma forma do outro título, antes de entrar na operação de divisão, o autor apresenta número inverso.

A abordagem de Bianchini na operação de divisão de frações começa com a divisão de um número fracionário por um número natural. O autor usa apenas um exemplo antes de seguir para alguns exercícios, no qual uma torta foi dividida em 8 partes e Artur recebeu uma dessas 8 partes, $\frac{1}{8}$. Dessa parte que recebeu, dividiu em 2 pedaços iguais e, a partir daí, busca encontrar quanto representa cada pedaço de Artur. O autor utiliza uma figura da torta partida em 8 partes e em seguida uma outra figura onde as 8 partes são divididas ao meio, mostrando assim que cada parte representa $\frac{1}{16}$. Não fica claro o motivo de o autor fazer as considerações propostas por ele, conforme podemos ver na figura 10. É natural que o aluno, ao ver esta resolução, se pergunte "por que multiplicar ambos os fatores da fração por meio?"; faltou uma explicitação sobre quando multiplicamos o dividendo e o divisor por um mesmo número, diferente de zero, o quociente não se altera e sobre porque o número $\frac{1}{2}$ foi escolhido para essa ação. Novamente, se faz indispensável intervenção de um professor.

Consideremos a seguinte expressão: $\frac{\frac{1}{8}}{2}$. Em seguida, vamos proceder como se ela fosse uma fração e considerar válidas as seguintes igualdades:

$$\frac{\frac{1}{8}}{2} = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{16} : \frac{2}{2} = \frac{1}{16} : 1 = \frac{1}{16}$$

Dividir um número na forma de fração por um número natural é equivalente a obter uma parte de outra parte:

$$\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$$

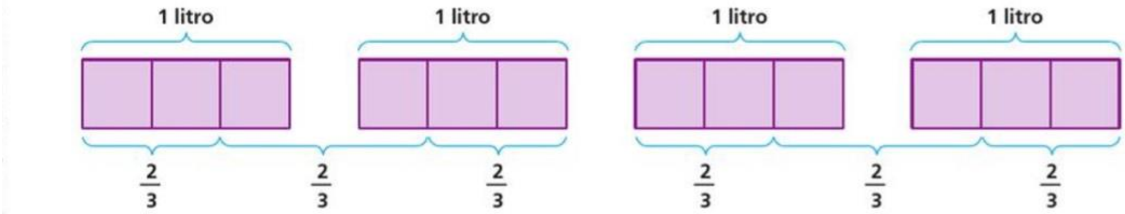
Note que esse quociente também pode ser obtido multiplicando-se $\frac{1}{8}$ pelo inverso de 2:

$$\frac{1}{8} : 2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

Figura 10 – abordagem do livro Matemática Bianchini 6º ano sobre divisão de fração por número natural.

Na forma de número natural dividido por um número fracionário, o autor traz um problema de encher 4 recipientes de 1 litro com garrafas que contem $\frac{2}{3}$ de litro cada. O autor vai trazer uma explicação por meio de figuras, mostrando na figura que em 4 recipientes de 1 litro cabem $6\frac{2}{3}$ de litro, conforme a figura 11. Podemos ver a utilização de uma ideia de partição na exemplificação por meio das figuras, mas o autor concluirá que $6\frac{2}{3}$ de litro cabem 6 vezes em 4 recipientes de 1 litro, explicitando a ideia de quotição. Logo após ele afirma que, como no exemplo anterior, basta utilizar o algoritmo "inverte e multiplica", numa referência a Van de Walle (2013, p.333), para resolver a divisão de um número natural por um número fracionário.

Para resolver o problema de Maria, vamos representar cada recipiente por uma figura retangular.



Cada $\frac{2}{3}$ de litro representa o conteúdo de uma garrafa de suco e cada $\square$ representa o conteúdo de $\frac{1}{2}$ garrafa. Logo, 4 litros equivalem a $\frac{12}{2}$ de garrafa, isto é, a 6 garrafas.

Vemos nas figuras que $\frac{2}{3}$ de litro cabem 6 vezes em 4 recipientes, ou seja, $4 : \frac{2}{3} = 6$

Logo, Maria precisa despejar 6 garrafas cheias de suco para encher 4 recipientes vazios.

Como no exemplo da divisão da goiabada de Pedro, esse quociente pode ser obtido multiplicando 4 pelo inverso de $\frac{2}{3}$.

$$4 : \frac{2}{3} = 4 \times \frac{3}{2} = \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Figura 11 – resolução do livro matemática Bianchini 6º ano para divisão de um número natural por uma fração.

Para a abordagem de divisão de uma fração por outra fração o autor é explícito na utilização do conceito de quotição ao afirmar que para calcular $\frac{2}{3}$ divididos por $\frac{1}{6}$ basta calcular quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{2}{3}$. Ele faz a utilização de figuras para representar essa divisão e mostrar $\frac{1}{6}$ cabendo 4 vezes em $\frac{2}{3}$ e logo, novamente, conclui que para efetuar essa divisão basta multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda fração, conforme figura 12. Após falar sobre divisão, segue potenciação e raiz quadrada. No livro da mesma coleção do sétimo ano vai trazer os números racionais em forma de números decimais.

O quociente de um número escrito na forma de fração por outro diferente de zero é obtido multiplicando-se o primeiro pelo inverso do segundo.

Figura 12 – conclusão do algoritmo "inverte e multiplica" feita pelo autor no livro Matemática Bianchini 6º ano.

Podemos concluir que ambos os livros de cada coleção constatam logo após alguns exemplos e de forma muito rápida o algoritmo de divisão de frações “inverte e multiplica”, como se este fosse algo trivial e intuitivo, sempre utilizando de ilustrações para o aluno observar a resposta procurada, sem fazer referência as ideias de divisão a fim de chegar no algoritmo, chegando neste geralmente chamando atenção para observar que o resultado das divisões eram iguais aos dividendos multiplicados por um número, e que este número era exatamente o inverso do divisor. Os autores utilizam do conceito de partição para concluir a divisão por quotição e utilizam bastante do conceito de quotição nas divisões com números fracionários, mas não unificam as ideias de modo a generalizar o algoritmo para qualquer um dos casos de divisão de frações a partir dos conceitos de divisão.

> Explicar o porquê da validade do algoritmo é necessário para uma aprendizagem significativa. Investigar regularidades encontradas em diversos exemplos e propor que os alunos façam suas próprias conjecturas é uma estratégia interessante para séries mais elementares. No entanto, a conjectura baseada em reconhecimento de regularidades de alguns exemplos não é suficiente para garantir que o resultado observado na regularidade valha em quaisquer exemplos. Não se deve permitir que o aluno pense que na matemática alguns exemplos são suficientes para se chegar a generalizações e que esta se resume a memorização de regras. (Santos, M. p.32)

5. DIVISÃO DE FRAÇÕES – ALGORITMOS

Na divisão de frações o algoritmo mais utilizado consiste no método inverte e multiplica. Apresentaremos aqui dois algoritmos da divisão de frações baseados em Walle (2013, p.333), o algoritmo do denominador comum e o algoritmo inverte e multiplica.

O algoritmo do denominador comum consiste em encontrar o denominador comum das frações e depois dividir os numeradores. Por exemplo, $\frac{5}{3}:\frac{1}{4} = \frac{20}{12}:\frac{3}{12} = 20:3 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. Generalizando, dados a, b, c e d, com b e d diferentes de 0,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{cb}{db} = \frac{ad \div cb}{bd \div bd} = \frac{ad \div cd}{1} = \frac{ad}{cb}$$

O algoritmo inverte e multiplica consiste em multiplicar a fração dividendo pelo inverso da fração divisor. Por exemplo, numa tradução livre de Walle (2013, p. 334 e 335), "*Você tem $1\frac{1}{2}$ laranjas que compõem $\frac{3}{5}$ de uma porção que serve um adulto. Quantas laranjas (e partes de laranja) fazem 1 porção inteira que serve um adulto?*". Para resolver este problema, você primeiro relaciona que uma porção inteira é equivalente a $\frac{5}{5}$ ou $5 \times \frac{1}{5}$, pois se ele trabalha com a parte $\frac{3}{5}$ da porção, a fração unitária que se relaciona com $\frac{3}{5}$ é $\frac{1}{5}$, pois $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$ e o todo é $\frac{5}{5} = 1$. Depois, você divide $\frac{3}{2}$ laranjas por 3, que se refere aos 3 $\frac{1}{5}$ de partes da porção, encontrando $\frac{1}{2}$, pois, $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, você tem $\frac{1}{2}$ de laranja para cada pedaço de $\frac{1}{5}$ da porção. Se 1 porção inteira são cinco pedaços de $\frac{1}{5}$, e cada pedaço de $\frac{1}{5}$ corresponde a $\frac{1}{2}$ laranja, basta então multiplicar $\frac{1}{2}$ por 5 e encontramos que $2\frac{1}{2}$ laranjas ou $\frac{5}{2}$ de laranjas servem uma porção inteira para um adulto. O que fizemos foi: $\frac{3}{2} \div 3 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3\times1}{2\times3} = \frac{1}{2}$ e então $\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$, ou seja, $\frac{3}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{2}$. Generalizando, dados a, b, c e d, com b e d diferentes de 0,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Um outro algoritmo não citado por Walle, é o algoritmo das frações equivalentes, que consiste em encontrar a fração dividendo equivalente a fração divisor. Por exemplo, ao realizarmos a operação $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$ pelo algoritmo das frações equivalentes obteremos: $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2\times4}{5\times4} \div$

$\frac{3}{4} = \frac{8}{20} \div \frac{3}{4}$, mas como 8 não é equivalente a 3, repetimos o processo da multiplicação por 1: $\frac{8\times3}{20\times3} \div \frac{3}{4} = \frac{24}{60} \div \frac{3}{4} = \frac{24\div3}{60\div4} = \frac{8}{15}$. Generalizando, dados a, b, c e d, com b e d diferentes de 0,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\mathrm{a} \times \mathrm{c}}{\mathrm{b} \times \mathrm{c}} \div \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a} \times \mathrm{c} \times \mathrm{d}}{\mathrm{b} \times \mathrm{c} \times \mathrm{d}} \div \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{a} \times \mathrm{d} \times \mathrm{c} \div \mathrm{c}}{\mathrm{b} \times \mathrm{c} \times \mathrm{d} \div \mathrm{d}} = \frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{bc}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{c}}$$

Deste processo também podemos concluir o algoritmo inverte e multiplica.

6. ATIVIDADE "PREPARANDO CACHORRO-QUENTE"

A atividade preparando cachorro quente é uma atividade proposta, testada e aplicada pela professora doutora Aline Simas da Silva (UERJ), descrita em sua tese de doutorado "*ATIVIDADES MULTIMODAIS EM UMA ABORDAGEM PARTITIVA PARA FRAÇÕES*". A atividade pretende tratar a divisão de frações como um caso particular da divisão por partição. Sua pesquisa tem uma abordagem investigativa acerca das ideias de divisão de frações por parte de alunos do 6º ano do ensino fundamental e também de futuros professores.

Nesta monografia utilizamos este material para auxiliar a compreensão do algoritmo da divisão de frações "inverte e multiplica", sem que este seja apenas apresentado após alguns exemplos. Além disso, nesta atividade fizemos adaptações do material original, como, por exemplo, todas as peças em E.V.A. são da mesma cor e não marcamos nela qual parte ela representa da peça inteira; outra adaptação foi a respeito da sequência didática, onde reduzimos o número de questões propostas e alteramos algumas quantidades de algumas questões, mas sempre mantendo o formato e o desenvolvimento da sequência. Outra adaptação será relatada mais a frente, pois foi feita diante da dificuldade de compreensão de uma das questões propostas.

A atividade consiste em "preparar cachorros-quentes" do jeito que o "cliente" pede: temos o material concreto, que é distribuído entre os alunos, para manuseio e resolução das questões e as questões são os pedidos dos clientes.

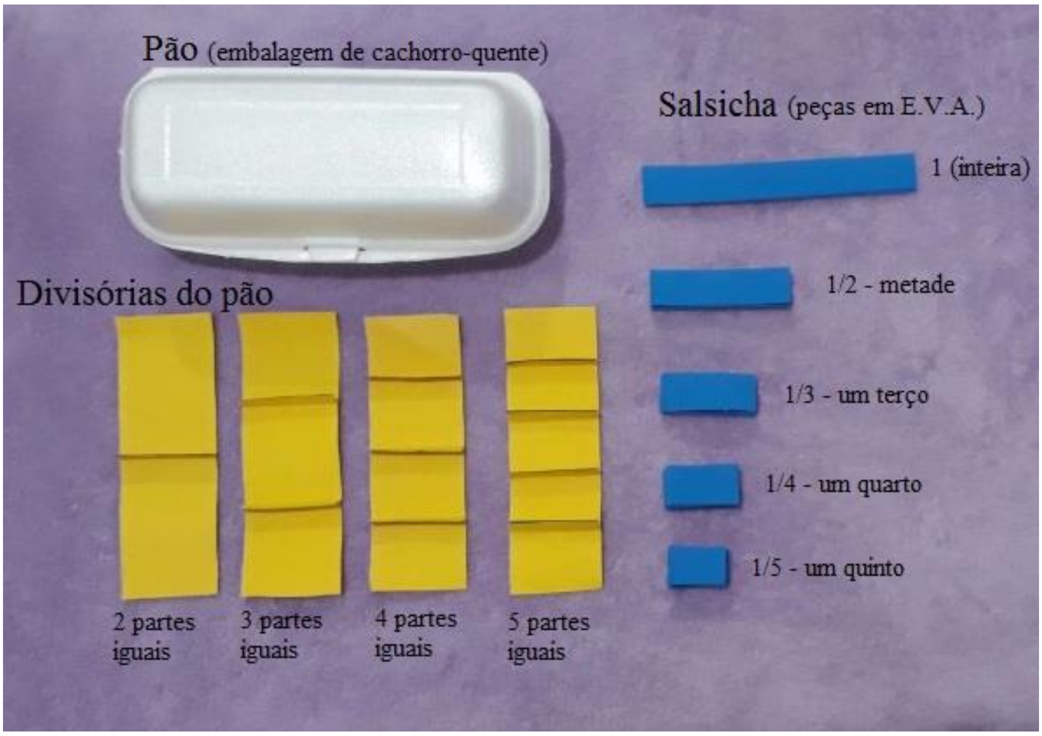


Figura 13– apresentação do material e suas partes para aplicação da atividade "Preparando cachorro-quente"

O material é composto por uma embalagem para cachorro-quente, que simboliza o pão do cachorro-quente, peças em espuma vinílica acetinada – E.V.A. – que simbolizam a salsicha e suas partes, 1 inteiro, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$, e divisórias de papel que dividem o “pão” em 2, 3, 4 e 5 partes iguais, conforme a figura 13. O material é feito artesanalmente, motivo pelo qual podemos ter pequenas diferenças entre uma pecinha e outra representante da mesma parte da salsicha, com exceção da embalagem de cachorro-quente.

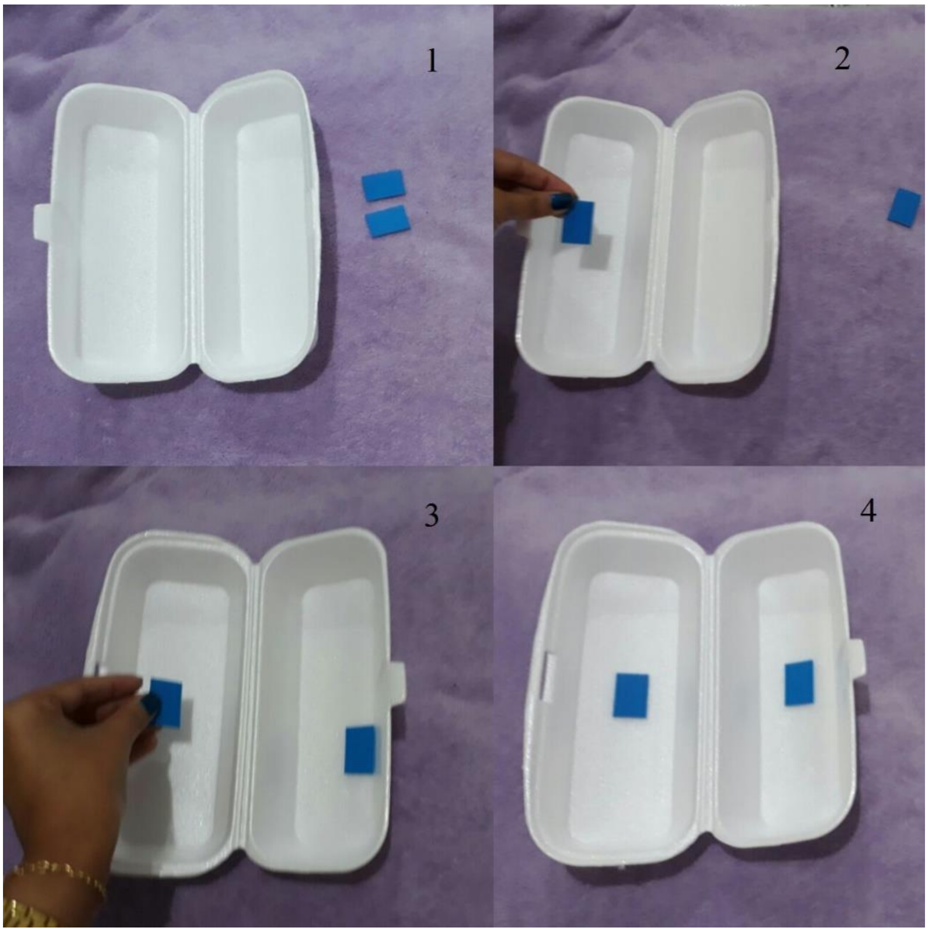


Figura 14 - 1) representação com o material de 2 “pães” e $\frac{2}{5}$ de “salsicha”; 2) fazendo a distribuição de “salsichas” em partes iguais para cada “pão”; 3) continuando a distribuição; 4) com auxílio do material chegamos ao resultado de $\frac{1}{5}$ de “salsicha” para cada “pão” - acervo pessoal.

Esta atividade aborda a divisão por partição, onde o dividendo, ou sua quantidade é distribuída, partilhada entre os elementos ou quantidade de elementos do divisor. O material promove essa ação de partilhar quando, diante do “pedido” proposto, que é a questão proposta, podemos pegar as peças de “salsicha”, que será sempre o dividendo, alterando a quantidade de acordo com a questão, e distribuir pelo divisor que é o pão ou as partes do pão. Por exemplo, nesta questão proposta na atividade “*Se você tem 2/5 de salsicha e 2 pães, quanta salsicha você tem para cada pão?*”, pegamos no material $\frac{2}{5}$ de “salsicha”, isto é, duas pecinhas de E.V.A. de

$\frac{1}{5}$ cada e abrimos a embalagem de cachorro quente de modo que cada parte da embalagem representa um “pão”, temos assim 2 “pães”, e distribuímos entre esses “pães” igualmente as pecinhas de $\frac{1}{5}$ de “salsicha”, encontrando que cada “pão” terá $\frac{1}{5}$ de “salsicha”, conforme podemos ver na figura 14.

Importante ressaltar que deve ficar muito claro, entre os alunos, antes da aplicação da atividade, o conceito de unidade e a fração como parte de um todo, de modo que eles consigam relacionar as partes da “salsicha”, as pecinhas menores com a pecinha inteira. Antes da atividade “Preparando cachorro-quente”, com as pecinhas de E.V.A., pode ser trabalhado essa relação de parte-todo. Mais uma vez, o material por si só não encerra todo conteúdo a ser trabalhado e a intervenção do professor é extremamente necessária: levantar questões como “O que estamos fazendo com as pecinhas de “salsicha?” ou “Como podemos escrever matematicamente o que estamos fazendo com o material?” são fundamentais para atingir o objetivo proposto com a atividade.

A atividade foi aplicada com o auxílio de uma apresentação em powerpoint e reprodução por um datashow. Nas primeiras duas aplicações não foram feitos registros por parte dos alunos, de modo que só foi trabalhado o material. Na última aplicação da atividade foram feitos registros e foi discutido sobre o material e suas possibilidades.

Neste trabalho, aplicamos esta atividade para 3 tipos de turmas: uma turma composta por alunos do ensino médio da escola Salesiano – Santa Rosa, Niterói – e um graduado em física, uma turma composta em sua maioria por alunos de 6º ano, alunos de 7º ano e uma aluna de 4º ano, todos da Escola municipal Francis Hime, e uma turma composta de professores de diversas redes de ensino, professores universitários e futuros professores, todos de matemática, na Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UniRio.

A atividade é proposta para o auxílio ao ensino da divisão de frações, após os alunos já terem aprendido sobre frações, suas representações e suas operações: adição e multiplicação. Estes são pré requisitos para um bom desenvolvimento da atividade. A atividade é apresentada aos alunos com uma ambientalização através da seguinte historinha: "*Félix ficou famoso por vender hot-dogs. Esse sucesso foi alcançado pelo diferencial de seus hot-dogs: o cliente escolhe quantas salsichas ele quer no pão! Mas num dia desses Félix teve um pedido diferente. Um de seus fregueses fez o seguinte pedido:* ***“Félix, eu quero dois hot-dogs, mas só quero ½ salsicha. Dá pra fazer?”****. Félix ficou com aquela “cara de interrogação”, tentando solucionar o pedido. Quanto de salsicha terá em cada pão? Será que você pode ajudar o Félix?*”. E a partir deste problema proposto começa a atividade.

Temos uma sequência didática para o desenvolvimento da atividade, que começa com a divisão de um número natural por outro natural, sendo o dividendo maior que o divisor e a divisão sendo exata, depois temos a divisão de dois naturais, porém o dividendo menor que o divisor, resultando num quocienet fracionário, seguindo com a divisão de um número fracionário por um numero inteiro, com quociente fracionário, e então a divisão de dois números fracionários, não equivalentes e frações unitárias. Após essa sequencia aparece uma divisão de dois naturais, sendo o divisor maior que o dividendo, e o resultado sendo um quociente fracionário e um número misto, até chegarmos na divisão de um numero natural por um numero fracionario. Nessa questão, que é a questão 8 seguida da 9 na lista abaixo, na aplicação da atividade, encontramos mais dificuldade.

A sequência didática proposta ao longo da atividade é a seguinte:

1. Questão problema que dispara a atividade junto com a história de ambientalização, mas não é resolvida agora: “Félix, eu quero dois hot-dogs, mas só quero ½ salsicha. Dá pra fazer?”
2. Se você tem 6 salsichas e 2 pães, quantas salsichas você tem para cada pão?
3. Se você tem 1 salsicha e 2 pães, quanta salsicha você tem para cada pão?
4. Se você tem 7 salsichas e 2 pães, quantas salsichas você tem para cada pão?
5. Se você tem $\frac{2}{5}$ de salsicha e 2 pães, quanta salsicha você tem para cada pão?
6. Se você tem $\frac{1}{5}$ de salsicha e $\frac{1}{4}$ de pão, quanta salsicha você tem em um pão?
7. Se você tem $\frac{3}{4}$ de salsicha e $\frac{1}{2}$ de pão, quanta salsicha você tem em um pão?
8. Se 1 salsicha cabe exatamente em $\frac{4}{5}$ de pão, quanta salsicha caberá em um pão inteiro?
9. Se você tem 2 salsichas cabem extamente em $\frac{3}{4}$ de pão, quanta salsicha caberá em um pão inteiro?
10. Retorno a questão inicial: “eu quero dois hot-dogs, mas só quero ½ salsicha. Dá pra fazer?”

7. RELATOS DE EXPERIÊNCIA

7.1 Relato de Experiência 1

O primeiro relato sobre a atividade foi a primeira apresentação da atividade feita em um evento da escola Salesiano – Santa Rosa, Niterói - onde foi ofertada, para os alunos que se inscrevessem, a oficina Matemática – curiosidades e passatempos, ministrada pelos professores da UniRio, e tive um espaço para ministrar minha atividade.

Para ambientação, conto-lhes a história, que já é o primeiro slide, e então proponho a questão problema: "[...] dois cachorros quentes, mas quero apenas meia salsicha". E então começamos a "preparar" uma série de cachorros quente para tentar resolver o pedido do cliente do Felix.

Foi percebida certa resistência ao uso do material por parte dos alunos que já sabiam dar a resposta das operações propostas. No entanto, uma aluna que a todo instante se dizia muito ruim em matemática utilizava o material para lhe ajudar, o que é realmente o esperado da atividade. Outros alunos usaram bem o material e outros tinham muita dificuldade em utilizar e entender o material, como ele "funcionava". Disto, observei que seria necessário, numa próxima apresentação da atividade, um tempo maior para apresentação do material, manipulação do material por parte dos alunos, e exemplos anteriores aos da atividade para entender a funcionalidade do material.

Foi observado também que as questões vão se desenvolvendo bem, até que chegam as questões em que temos que dividir números naturais por frações. Na primeira em que temos uma salsicha em $\frac{4}{5}$ de pão, ficaram claras as dificuldades que nos levaram a reformular a pergunta para a próxima apresentação. Esta questão foi a que mais desprendeu tempo, me fez ir ao quadro para tentar explicar e esclarecer melhor a questão, e quase a totalidade da turma não conseguiu solucioná-la com o uso do material.

A realização da atividade nos faz observar pontos e questões que podem ser melhorados e outros que devem ser modificados. Não tive nenhum problema com indisciplina e controle de turma, até por ser um grupo com aproximadamente oito pessoas, dentre alunos do ensino médio e uma pessoa já graduada.

Desta apresentação para a apresentação seguinte foram feitas as seguintes alterações:

a) maior tempo para manipulação do material concreto e as relações entre eles;

b) modificação do enunciado da questão da divisão de número natural por fração.

Antes do próximo relato, é interessante deixar registrado para trazer a conhecimento que, na disciplina Estágio Supervisionado deste curso de licenciatura, na qual temos que aplicar a regência, isto é, uma aula para a turma que estamos acompanhando durante o ano letivo, utilizei esta mesma atividade com os alunos, numa turma de aproximadamente 25 alunos do 6º ano do Colégio Brigadeiro Newton Braga e, por também não conhecer entender por completo o objetivo ser alcançado com o material, não estar esclarecida com as definições de divisões de frações e estar principalmente focada em fazer os alunos chegarem no algoritmo inverte e multiplica de qualquer forma, não obtive sucesso, entendendo até que não havia feito um bom preparo de aula. Porém, o que faltou naquele momento foi um aprofundamento no conhecimento do conteúdo e do material, sua funcionalidade e do conceito a ser trabalhado com ele. Quando entendemos que estamos buscando uma outra forma de interpretação de divisão de frações que nos auxiliará a entender o algoritmo inverte e multiplica, aí sim conseguimos explorar o material e alcançar o objetivo proposto.

7.2 Relato de Experiência 2

A atividade foi apresentada no evento da escola Municipal Francis Hime – Taquara, Rio de Janeiro. Dentre diversas oficinas para alunos e professores, foi ofertada a oficina Preparando Cachorro quente para os alunos do sexto ano da escola. Participaram aproximadamente 20 alunos, dentre eles uma aluna do quarto ano do ensino fundamental, que ainda não conhecia sobre frações, que é pré-requisito para esta atividade.

Para ambientação, novamente conto-lhes a historinha de Félix e assim começamos com a questão problema a utilização do nosso material. Separei os alunos em grupos de quatro e entreguei dois kits do material. Para a aluna do quarto ano, entreguei um kit. Ela estava em um grupo também, mas teve um kit só com ela.

Nesta apresentação, com alunos de sexto ano com idade aproximada de 10 anos, tive mais dificuldade com a manutenção da ordem em sala. Porém, isto não foi um fator que tenha atrapalhado o desenvolvimento da apresentação e, além disso, os alunos foram muito receptivos.

Nesta aplicação da atividade, já com as modificações observadas na primeira apresentação feitas, deixei um tempo maior pra que eles manipulassem o material e vissem, encontrassem suas relações. Após esse momento começamos então a atividade, foi contada a história de ambientação, e em seguida iniciadas as perguntas propostas.

O uso do material por parte destes alunos já foi mais efetiva, visto que ainda não conheciam o conteúdo de divisão de frações. Nossa aluna do quarto ano precisava ser orientada e auxiliada na resolução das questões propostas e conseguia resolvê-las com o material.

Apesar das modificações já feitas na atividade, ao chegar na questão da divisão de um número natural por uma fração, novamente tivemos dificuldades. A questão que dizia “se uma salsicha cabe exatamente em quatro quintos de pão, quanta salsicha cabe em um pão inteiro?” teve como respostas “*cabe uma salsicha no pão*”, “*cabe 1 salsicha e 1/5 de salsicha em um pão*”, “*cabe isso* (e me mostravam $\frac{1}{5}$ de salsicha em cada $\frac{1}{5}$ do pão)”, e não conseguiam chegar na resposta $1\frac{1}{4}$, ou cinco quartos de “salsicha”. Novamente fui ao quadro para tentar esclarecer e explicar o que estava acontecendo para que eles então tentassem resolver com a ajuda do material. Ainda assim eles não conseguiram chegar no resultado com o material.

Com isso, novamente nos pusemos a pensar em como resolver esse problema com nosso material. Assim, conversando com professores da área, professor Fábio e professora Marcela, foi me sugerido que fizesse mais outro tipo de salsicha para o material, onde essa caberia em exatamente quatro quintos do pão, pois a partir do momento que propusemos esta questão, a unidade de medida mudou, e não poderíamos, então, continuar com o mesmo material, pois assim não ficaria intuitivo o procedimento com auxílio do material. Essa alteração será testada na próxima apresentação desta atividade, e será para um grupo de alunos de licenciatura de matemática. Demais alterações não foram observadas nem julgadas necessárias para uma próxima aplicação da atividade.

Antes do próximo relato, cabe aqui uma observação: até a segunda apresentação da atividade ainda estávamos presos no conceito de divisão por quotição, pensando em medidas e unidades de medida, em "quantos cabem em". Tanto que quando levávamos as observações e procurávamos orientações e sugestões de outros professores de matemática, eles ficavam confusos com a pergunta e também com o material e não chegávamos a um denominador comum sobre solucionar este problema que estava acompanhando as apresentações. Alteramos o enunciado da questão e ainda assim não víamos clareza na execução dos alunos com auxilio do material, sempre havia necessidade de ir até o quadro explicar o que acontecia. Dentre essas discussões sobre o que estaria acontecendo, pois começávamos a duvidar do material e sua utilidade para a proposta ou então do nosso conhecimento sobre o material, chegamos a pensar "mas gente tem algo estranho: como pães caberão em salsichas? O correto seria salsichas cabendo em pães!" porque ainda não estávamos pensando na partilha, na distribuição de salsichas em pães, e sim no "quantos cabem em". Diante disso a professora Loisi entrou em contato com a professora Aline, tivemos acesso a sua tese, e então ficou claro o que estávamos fazendo. Ainda no próximo relato trabalhamos com a alteração do tamanho das "salsichas".

7.3 Relato de experiência 3

A atividade foi reapresentada na escola Municipal Francis Hime – Taquara, Rio de Janeiro - em uma turma do sétimo ano. Estávamos reaplicando esta atividade após as modificações sugeridas e observadas da última apresentação para o material no material. Novamente, para ambientação, conto-lhes a historinha sobre o Felix e, diante da questão problema, começamos a resolução com a utilização do material.

Os alunos foram separados em grupos de quatro pessoas e foi entregue um kit do material para cada grupo. Nesta apresentação, com alunos do sétimo ano, encontrou-se mais dificuldade com a manutenção da ordem em sala de aula. Eles eram bem agitados e falavam bastante, e, como eram um número razoavelmente grande, por diversas vezes ganhavam no volume, mas conseguimos concluir a atividade. Nesta turma, até por ser uma turma que estava em seu período de aula comum, não era nenhum evento em que eles escolhessem participar, nos deparamos com um grupo que os alunos não compreendiam o assunto, nem mesmo as frações, não sabiam relacionar as partes da “salsicha” com a “salsicha” inteiras, mesmo após este assunto ter sido trazido antes da atividade e toda a turma ter tido o tempo de manuseio do material para conhecimento do mesmo. Foi um trabalho bem difícil com eles que, com essa dificuldade, por vezes tinham vergonha de tentar usar o material para atingir os objetivos propostos pela atividade, tornando-a bem complicada ou até desinteressante para eles.

Nesta aplicação da atividade, já com as modificações da primeira e segunda apresentações, deixamos um tempo para que eles manipulassem o material e vissem, encontrassem as relações entre as partes da “salsicha”. Após esse momento começamos então a atividade, foi contada a história de ambientação, e em seguida iniciadas as perguntas propostas.

Nesta apresentação contei com a participação do professor co-orientador deste trabalho, o professor Luiz Felipe Lins. Sua experiência fez bastante diferença na apresentação, enquanto este fez intervenções extremamente valorosas, que reforçou as relações das peças da “salsicha”, representando-as em desenho no quadro.

Questionamentos aos alunos do tipo “quantas partes de $\frac{1}{5}$ de salsicha precisamos pegar para ter uma salsicha inteira?” e “Podemos combinar partes diferentes de salsicha para obter uma salsicha inteira?” foram corretamente respondidas por grande parte da turma. Quanto a segunda pergunta, foram perguntados se teria uma resposta diferente com o material e eles, após uma breve olhada no material concluíram corretamente que não.

O uso do material na primeira questão proposta na atividade foi igual nulo, visto que a primeira questão é uma divisão exata de números naturais, os alunos prontamente responderam sem nenhuma dificuldade e sem mexer no material. Na segunda questão proposta, onde matematicamente espera-se o resultado da operação $1 \div 2$, os alunos também responderam rapidamente "*meia salsicha para cada pão"*, mesmo sem utilizar o material. Mas, como o objetivo era que eles utilizassem o material, pedi então que eles representassem com o material essa divisão e uma das respostas que obtive foi a da figura 15, e, então, pude observar que eles ainda não haviam compreendido a aplicação ou funcionalidade do material. Com isso tornei a chamar atenção para o material e para as representações com o material.

Figura 15 – 1) representando no material 2 "pães" e 1 salsicha inteira e 2 metades de "salsicha" que também fazem q "salsicha" inteira; 2) a representação com o material de um dos alunos para a sentença $1 \div 2$*; 3) como é corretamente a representação com o material da sentença* $1 \div 2$.

A próxima questão foi resolvida rapidamente também, sem utilização do material: $\frac{2}{5}$ de "salsicha" para 2 "pães". Nesta questão o professor Luiz também interviu com um ótimo questionamento: "*Como poderíamos representar matematicamente o que acabamos de fazer?*" e então os alunos responderam que dividiram $\frac{2}{5}$ por 2 e o professor anotou este resultado no quadro.

Seguindo com a atividade, tivemos a primeira divisão de frações, e as respostas já não foram tão rápidas, e sugeri que eles usassem o material. Neste momento, orientei que eles observassem a questão por partes, e fossem separando do material o que eles iriam precisar usar para solucionar aquela questão. Então eles resolveram, obtiveram os $\frac{4}{5}$ da solução e novamente o professor Luiz interviu e perguntou como poderíamos escrever matematicamente aquele resultado e obtivemos duas respostas distintas:

a) $4 \times \frac{1}{5}$

b) $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4}$ - Essa resposta foi induzida, pois quase ninguém visualizou essa divisão. Apenas um aluno, após a indução, disse que seria $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4}$ e depois tivemos a explanação do professor Luiz acerca dessa divisão.

Seguimos a atividade, e ainda obtivemos dificuldade nas questões que envolviam frações divididas por frações.

Surgiu uma afirmação de “três metades” no grupo que tinha mais dificuldade. De pronto, tentei explicar que metade era uma palavra que se referia a dividir algo em 2 partes iguais, e assim eu não poderia nunca ter três metades, pois se eu divido em 3 partes iguais passamos a ter $\frac{1}{3}$ de algo e não 3 metades.

No resultado da questão que encontramos $\frac{6}{4}$, parte da turma respondeu exatamente esta fração e outra parte respondeu 1 salsicha e meia. Então, questionados em como encontraram essa resposta eles explicaram que $\frac{2}{4}$ era meia salsicha e $\frac{4}{4}$ era uma salsicha inteira. Ótima observação para comentar sobre os números mistos.

Na questão que propõe uma divisão de dois números naturais com resultado fracionário, eles também responderam sem utilizar o material. Novamente, o grupo com mais dificuldade questionou sobre a impossibilidade de resolver aquela questão com o material por não ter sete “salsichas”. Trouxe, então, esse questionamento para toda a turma e perguntei quantas salsichas inteiras eles tinham no material e as respostas foram várias: “*duas*”, “*três*”... Diante disso, tornei a explicar que se juntássemos as frações da “salsicha” de acordo com a sua representação da parte da “salsicha” teríamos uma “salsicha” inteira; ainda depois de tornar nesta explicação, ao pergunta-los quantas “salsichas” inteiras tínhamos alguns responderam “5”, mas kogo foram corrigidos por seus próprios colegas que afirmaram que tinha 10 “salsichas” inteiras no material e representaram com o material as dez.

Chegamos, então, na questão que motivou a modificação no material. Fiz a ambientação, contando a historinha que o fabricante da salsicha mudou e a salsicha diminuiu de tamanho, e entreguei um kit de “salsichas” novo, com tamanho menor do que a que eles já tinham.

Assim que terminei de contar a historinha e entregar o material e voltei a questão, um dos alunos já me respondeu que a solução era $1\frac{1}{4}$, mas ele era um dos que tinham o pensamento mais ligeiro. Obtivemos de outro grupo a resposta correta, e ainda tivemos a resposta $1\frac{1}{5}$. A esses alunos pedi que me explicassem o porquê da resposta que encontraram:

a) $1\frac{1}{4}$: um dos grupos que deu essa resposta disse que, como a salsicha diminuiu, ele teve que pegar um pedaco maior da salsicha para completar o espaço do pão que sobrava e pegou $\frac{1}{4}$ da salsicha, pois o $\frac{1}{5}$ de agora não era o mesmo $\frac{1}{5}$ de antes, esse $\frac{1}{5}$ diminuiu, então não poderia ser $\frac{1}{5}$ e tinha que ser $\frac{1}{4}$. Eles pegaram a salsicha não em um pedaço inteiro, mas em cinco pedaços de $\frac{1}{4}$.

b) $1\frac{1}{5}$: um dos grupos que deu essa resposta disse que como uma salsicha cabia em $\frac{4}{5}$ do pão e sobrou $\frac{1}{5}$ de pão, então ele completou com $\frac{1}{5}$ de salsicha;

O grupo que deu a resposta b foi questionado se tinham, então, a mesma quantidade de salsicha em cada $\frac{1}{5}$ do pão, somente depois dessa análise que eles viram que não estava igual.

Retornamos, então a pergunta inicial da atividade: 2 “pães” e $\frac{1}{2}$ “salsicha”. Neste momento, eles já estavam muito agitados porque o sinal já tinha tocado e foi uma grande movimentação, mas o primeiro questionamento que tive foi se era $\frac{1}{2}$ “salsicha” em cada “pão”, então expliquei que eram 2 “pães” e apenas $\frac{1}{2}$ “salsicha”. Neste momento, um dos alunos respondeu que era, então, $\frac{1}{4}$ de “salsicha”, mas ainda ouvi respostas como $\frac{1}{3}$. Expliquei novamente que era $\frac{1}{2}$ “salsicha” para 2 “pães” e eles pensaram mais um pouquinho e chegaram no resultado $\frac{1}{4}$ de salsicha.

Após isso, tentei fazer um apanhado do que fizemos, falando pra eles que resolvemos as questões hora dividindo, hora multiplicando, e hora multiplicando e dividindo na mesma questão, tentando, assim, remeter ao algoritmo inverte e multiplica. Perguntei ao professor Luiz se deveria, naquele momento, enunciar para eles o algoritmo e ele disse que não, e perguntou a turma como é que eles faziam para dividir frações e. alguns deles lembraram, usando como exemplo o que estava no quadro, que era a questão de $\frac{1}{5} \div \frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5} \times 4$, ele chamou atenção e destacou que o 4 era o inverso de $\frac{1}{4}$, e encerramos a atividade.

7.4 Relato de experiência 4

A atividade foi apresentada durante a última aula do projeto de extensão *Curiosidades e Passatempos: o outro lado da matemática*, ministrado e idealizado por professores da UniRio, entre eles a professora orientadora e a professora da banca avaliadora deste trabalho, Loisi e Cristiane, respectivamente. Este é um projeto para professores e futuros professores, principalmente de matemática, mas não exclusivo, onde são ministrados jogos com conteúdo matemático, desde sua confecção até sua aplicação. Assim, o público para esta apresentação foram professores e futuros professores, tivemos em torno de nove pessoas, dentre elas uma aluna da professora Aline Simas que já conhecia o material, além dos professores do projeto de extensão, mais uma aluna de 9 anos que acabou de concluir o 3º ano do ensino fundamental.

Diferente das outras apresentações, expliquei do que se tratava a atividade, que foi originalmente tese de doutorado da professora Aline Simas, falei sobre as definições de divisão, por partição e quotição, e sobre a resistência em atrelar a divisão por partição a divisão de frações. Falei das adaptações feitas do material original para este material e como proceder com os alunos com este material sobre deixá-los por um tempo manuseando o material, principalmente as pecinhas em E.V.A., para que eles encontrem suas relações, e assim ser trabalhado com eles a fração como parte do todo.

Iniciando então a atividade, conto-lhes a história de ambientação e seguimos com as questões propostas. Como a primeira questão é uma questão simples de divisão de naturais todos respondem rapidamente e dizem ser uma questão muito fácil e que nem precisava do material. Expliquei que sim, era uma questão simples e que era a primeira questão para entender o funcionamento do material.

Fomos seguindo, e a medida que as questões com divisões de frações foram surgindo foram aparecendo mais dúvidas e ficando evidente a dificuldade que os participantes que já conhecem a divisão de frações têm com o material. A participante que acabara de concluir o 3º ano estava respondendo com o auxílio do material corretamente as questões.

Quando chegamos na questão em que encontrávamos tamanha dificuldade sempre, que é a divisão de 1 por $\frac{4}{5}$, poucos participantes não compreenderam e não conseguiram executar com o material. A maioria entendeu e respondeu com o material, mas o mais interessante e importante é que nossa aluna de 9 anos que já conhece frações mas ainda não viu o conteúdo de operações com frações, conseguiu com o material responder corretamente a questão proposta. Esse é o esperado, que os alunos do 6º ano, que já conhecem as frações e também suas operações de soma e multiplicação e até a inversa de uma fração, com o auxílio do material, consigam visualizar o processo do algoritmo inverte e multiplica, isto após a aplicação do material e com a intervenção do professor.

Ao fim, tornei ao quadro explicando o processo do material, a busca que ele promove, o método de tentativas que ele promove e ressaltei que, quando dividimos um número qualquer por uma fração, o que estamos fazendo é: dada a fração $\frac{a}{b}$, isto representa a parte a do todo b, e, dado um número *n* pra ser dividido por essa parte *a* de *b*, precisamos entender que o todo se faz de $b \times \frac{a}{b}$ e, assim, dividir n por $\frac{a}{b}$ é dividir n pela parte a de b (1), e este resultado multiplicar pelo número de partes *a* que formam *b*, que é exatamente *b* (2). Logo, temos o algoritmo inverte e multiplica ao dividirmos n por a e multiplicar pelo número de vezes que somamos o a para fazer o todo *b:*

$$n \div \frac{a}{b} =$$

$$\left[n \div a = \frac{n}{a} \right] (1)$$

$$\left[\frac{n}{a} \times b \right] (2)$$

$$n \times \frac{1}{a} \times b = n \times \frac{b}{a}$$

$$n \div \frac{a}{b} = n \times \frac{b}{a}$$

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após uma grande dedicação a este trabalho, buscando entender como a partição pode ser abordada na divisão de frações, diminuindo a distância entre a divisão dos números naturais e dos números fracionários, como o algoritmo inverte e multiplica pode ser apresentado com uma maior explicação de seu processo, como o material concreto auxilia na compreensão do abstrato, posso concluir que, feitas as experiências, um profundo conhecimento do conteúdo é de extrema necessidade por parte do aplicador, de modo que este precisa elucidar todas as questões primárias, frações, parte todo, conceito de unidade, para o aluno, antes da aplicação do material, de modo que este consiga visualizar no material concreto o conceito abstrato que lhe foi passado, e então investir suas tentativas no material em busca da solução da questão proposta.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, ÁLVARO; VASCONSELOS, MARIA JOSÉ. **6 Praticando matemática. 7 Praticando matemática.** Edição Renovada. Coleção Praticando Matemática. 3 Ed. Editora do Brasil. São Paulo, 2012.

AVILA, ARTUR. **Entrevista para Revista Galileu, reproduzida pelo site do IMPA.** Disponível em: <https://impa.br/page-noticias/as-pessoas-criam-aversao-a-matematica-desde-cedo/>. Acesso em: 10 de outubro de 2017.

BIANCHINI, EDWALDO. **Matemática Bianchini 6º ano. Matemática Bianchini 7º ano.** 7 Ed. Editora Moderna. São Paulo, 2011.

BORDIN, LAURA MOREIRA; BISOGNIN, ELENI. **Os Materiais Manipuláveis e a Utilização de Jogos Pedagógicos no Processo de Ensino e Aprendizagem das Operações com Números Inteiros.** II CNEM – Congresso de Educação Matemática. IX EREM – Encontro Regional de Educação Matemática de 07 a 10 de junho de 2010. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE80.pdf>. Acesso em: 30 de outubro de 2017.

GIRALDO, V. **A Matemática e Seus Ensinos como Práticas Sociais.** Laboratório de práticas matemáticas para o ensino. Programa de pós-graduação em ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Outubro de 2017.

GIRALDO, V. **O Desenvolvimento do Conceito de Número na Escola Básica.** Simpósio da Formação do Professor de Matemática. ANPMat – Assossiação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica. Agosto de 2015. Novembro de 2017.

LINS, L. F. **Resignificando a Matemática na Educação Púbica da Cidade do Rio de Janeiro: Um novo projeto de vida para os alunos** (Dissertação de Mestrado). UNIRIO, 2016.

LOPES, ANEMARI ROESLER LUERSEN VIEIRA; PERLIN, P. **A necessidade Histórica da Criação das Frações e a Organização do Ensino do Professor dos Anos Iniciais.** ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul, de 16 a 18 de outubro de 2013 – Comunicação científica. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/932/907>. Acesso em: 10 de setembro de 2017.

LOPES, KIM. **Algumas abordagens no uso de material concreto no ensino de matemática** (Dissertação de Mestrado). UFRJ, 2014. Disponível em <http://www.im.ufrj.br/nedir/disciplinas-Pagina/UFRJ_TCC_KIM27Mar2015.pdf>. Acesso em: 17 de outubro de 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. 2016. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/pdf/4.2_BNCC-Final_MA.pdf>. Acesso em: 17 de outubro de 2017.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Plano Nacional do Livro Didático 2016 Ensino Fundamental Anos Iniciais.** Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/309176126/pnld-2016-alfabetizacao-matematica-e-matematica-pdf>. Acesso em 5 de outubro de 2017.

MONTEIRO, CECILIA; PINTO, HÉLIA; FIGUEIREDO, NISA. **As Fracções e o desenvolvimento do sentido do número racional.** In: Revista Educação e Matemática nº 84 – setembro/outubro 2005. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/46657722_As_fraccoes_e_o_desenvolvimento_do_sentido_do_numero_racional>. Acesso em: 15 de outubro de 2017.

NACARATO, ADAIR MENDES. **A sala de aula de matemática dos anos iniciais como objeto de investigação de professoras-pesquisadoras.** In: Revista Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, Número Especial, pp. 837-855, 2013.

NACARATO, ADAIR MENDES. **Eu trabalho primeiro no concreto.** In: Revista de Educação Matemática – Ano 9. Nos. 9-10 (2004-2005). 1-6. Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

SILVA, ALINE SIMAS DA. **Atividades multimodais em uma abordagem partitiva para divisão de frações** (tese de doutorado). Universidade Anhaguera, São Paulo – 2017. Disponível em: <https://www.uea.ac.uk/documents/9512196/18811921/TESE+ALINE.pdf/eab1c060-8459-429a-bb80-3ae55f399dac>. Acesso em: 02 de setembro de 2017.

RANGEL, LETICIA GUIMARÃES. **Teoria de Sistemas – Matemática Elementar e Saber Pedagógivo de Conteúdo – Estabelecendo Relações em um Estudo Colaborativo** (Tese de doutorado). UFRJ, 2015.

RIBEIRO, ALESSANDRO JACQUES. **A Áálgebra que se aprende e a Álgebra que se ensina: encontros e desencontros na visão dos professores.** XIV CIAEM – México, 2015. Disponível em: <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/23948/24104>. Acesso em: 03 de agosto de 2017.

SANTOS, MICHAEL CHIRSTIAN SOARES DOS. **Tópicos Sobre o Ensino de Frações: Divisão de Frações** (dissertação de mestrado). UFRJ, 2013. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/Michael_Cristian_Soares_dos_Santos.pdf>. Acesso em 25 de agosto de 2017.

SILVA, A. F.; KODAMA, H. M. Y. **Jogos no Ensino da Matemática.** II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, UFBa, 25 a 29 de outubro de 2004.

SOUZA, ANA CLÁUDIA GOUVEA DE; MENDONÇA, L. O. S. **Aprendizados Discentes e Docentes: Formar Formando-se na Licenciatura em Matemática.** In: Educação Matemática em Revista, nº 52, pp. 5-11, julho 2016. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: <www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/698/pdf>. Acesso em 13 de junho de 2017.

WALLE, JOHN A. VAN DE; KARP, KAREN S.; WILLIAMS, JENNIFER M. BAY. **Elementary and Midlle School Matematics Teaching Developments.** 8 Ed. Copyright © 2013, 2010, 2007, 2004 by Pearson Education.

ANEXO

JOGO FRAÇÕES E REPRESENTAÇÕES

O jogo Frações e Representações é um jogo proposto pelos professores criadores do projeto *Curiosidades e Passatempos: o outro lado da Matemática*, entre eles a professora Loisi e professora Cristiane de Mello. É um jogo que trabalha a representação das frações e também a equivalência de frações.

O jogo é composto por dois tipos de cartas: as cartas das frações, com frações, e as cartas para os jogadores fazerem as representações das frações, com figuras variadas, conforme pode ser visto na figura 1.

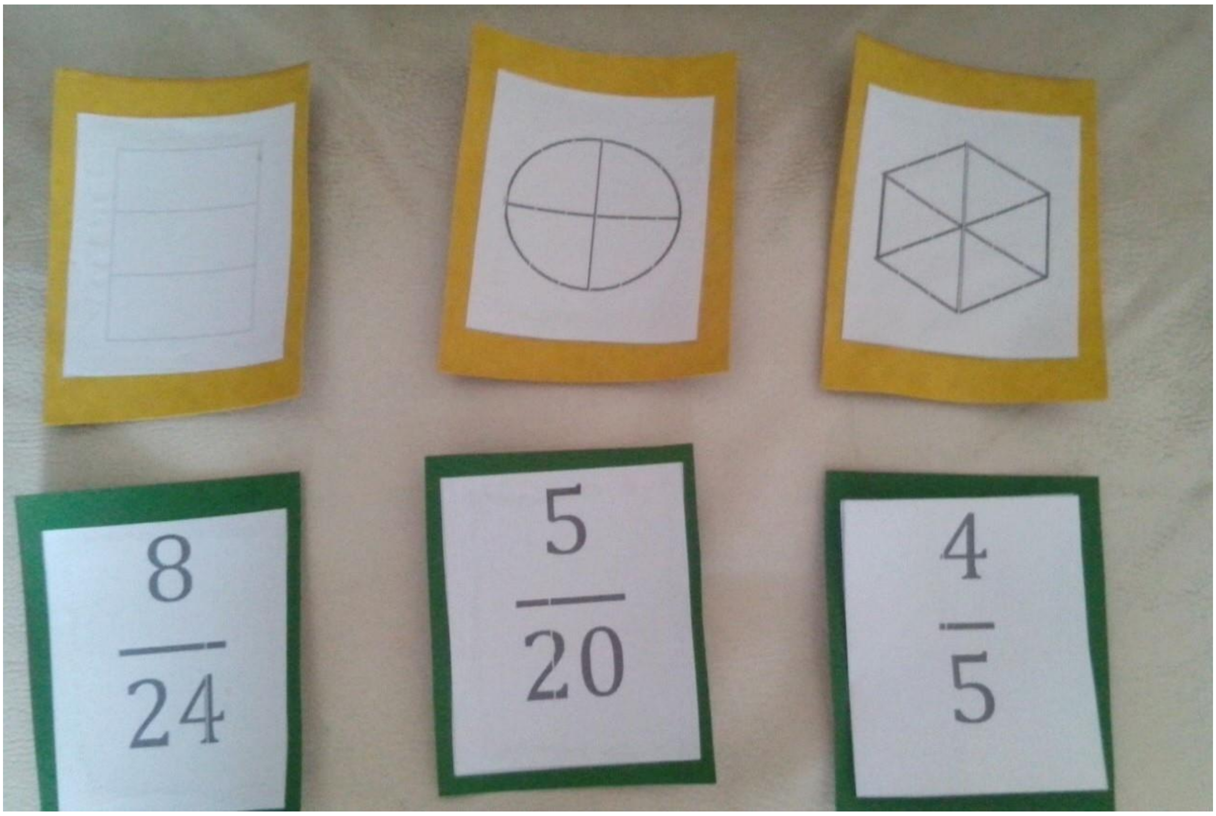


Figura 1: Cartas com fundo verde – cartas das frações; cartas de fundo amarelo – carta para representar as frações.

Para confecção do jogo o material necessário é:

- papel cartão de duas cores diferentes;
- frações confeccionadas no computador e impressas;
- figuras para poder se representar as frações confeccionadas no computador e impressas;
- papel contact transparente;

- materiais para execução: cola, tesoura, régua, etc.

Com estes materiais em mãos, recorte as frações e figuras e cole-os no papel cartão, cada um na sua cor. O papel contact é indispensável pois permite que o jogo aconteça mais de uma vez com o mesmo material, pois aumenta a durabilidade dos cartões e, nos cartões para representação das frações, permite que se marque com canetinha ou caneta de quadro branco e depois apague.

O jogo pode ter quantas frações o confeccionador quiser e quais ele quiser. As figuras para representação das frações podem ser as mais diversas, corações, círculos, estrelas, retângulos divididos em várias partes, como os exemplos da figura 1, e precisa que tenha duas figuras de cada, para o jogo poder acontecer. É necessário que tenha a figura com partes suficientes para representar as frações propostas. Se temos uma fração $\frac{6}{20}$, temos que ter uma figura com 20 partes ou então 10 partes, pois $\frac{6}{20}$ equivale a $\frac{3}{10}$.

Para jogar, separe duas pessoas ou duas duplas por kit de jogo. As cartas das frações ficam voltadas para baixo e cada dupla ou cada jogador tem um kit idêntico das cartas com as figuras para representação das frações. Escolhido quem vai virar a carta da fração, vira-se a carta da fração e cada dupla tem que procurar representar com a canetinha na carta das representações a fração que saiu. A dupla ou jogador que representar primeiro ganha aquela carta da fração. Quem tiver mais cartas de fração no fim do jogo, ganha.

É interessante que tenham frações que a primeira vista não tem como se representar com as figuras que se tem em mãos, pois isso estimulará a busca pela fração equivalente que poderá ser representada em alguma das figuras das cartas de representação.

Após o jogo, segue com a sequência didática abaixo, lembrando que, as perguntas devem ser de acordo com as frações disponíveis no jogo:

1. Escreva uma fração que não faz parte do jogo e faça uma representação da mesma.
2. Quantas representações aparecem no jogo para a fração $\frac{1}{1}$? Explique.
3. Existe uma representação da fração $\frac{4}{7}$ diferente da representação que você identificou no jogo? E da fração $\frac{1}{6}$? Em caso afirmativo, exiba.
4. Considere as representações das frações $\frac{10}{23}$ e $\frac{14}{23}$ dadas no jogo. Qual é a menor?

5. Considere as representações das frações $\frac{5}{9}$ e $\frac{8}{9}$ dadas no jogo. Qual é a maior?
6. Escreva todas as frações equivalentes a fração $\frac{1}{2}$ que fazem parte do jogo. Existe uma representação destas frações diferente da representação que você identificou no jogo? Em caso afirmativo, exiba.
7. Escreva duas frações equivalentes a fração $\frac{1}{4}$ que não fazem patê do jogo e exiba representações das mesmas, diferentes da representação que você identificou no jogo.

Após aplicação do jogo e da sequência didática, pode-se retomar todos os conceitos trabalhados nesta atividade junto aos alunos e esta atividade é boa para visualizar e fixar o conteúdo matemático proposto.